654079, Россия, Кемеровская обл.,
г. Новокузнецк, проезд Коммунаров,5
тел./факс: 20-08-81, 20-08-82
e-mail:licey-11@mail.ru
www.lizey11.ucoz.ru

ИНН4217023667
КПП 421701001
ОКАТО 32431000000
ОГРН 1034217005877

муниципальное бюджетное
нетиповое общеобразовательное учреждение
«Лицей №11»

ПРИНЯТО
педагогическим советом
МБ НОУ «Лицей №11»
Протокол №1 30.08.2019г.

УТВЕРЖДАЮ
Директор МБ НОУ «Лицей №11»
В.Н. Пересыпкин
Приказ № 230 30.08.2019г.

Дополнительная
общеразвивающая программа

«ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ»
10,11 КЛАССЫ

направленность: естественно-научная

Новокузнецк 2019г.

Пояснительная записка

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Дополнительные вопросы по математике» предназначена для учащихся 10-11 классов, и рассчитана на 70 часов каждый год обучения (2 часа в неделю).

Календарный учебный график

Период освоения дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы составляет – 35 недель (70 часов).

Форма проведения занятий - очная, групповая.

Начало учебных занятий – 02 сентября 2019 г.

Окончание учебных занятий – 25 мая 2020 г.

Каникулы: Осенние 28.10.2019 г. – 04.11.2019 г.

Зимние 28.12.2019 г. – 12.01.2020 г.

Продолжительность занятий - 45 минут

Учебный план дополнительной общеразвивающей программы

Наименование программы	Количество часов в неделю/ в год
Дополнительные вопросы по математике	2/70
Всего	2/70

Итоговый контроль проводится в виде тестирования (18.05.2020 г - 22.05.2020г).

Дополнительная общеразвивающая программа имеет **естественно-научную направленность.** Главной целью программы является углубление знаний старшеклассников по вопросам решения сложных задач, для решения которых необходимо уметь применять некоторые специальные приёмы. Многие задачи, рассматриваемые в данном курсе при решении «в лоб», то есть по известному, накатанному алгоритму оказываются нерешаемыми или решение оказывается неадекватно сложным. Основой решения таких задач является дополнительная теория, не рассматриваемая в курсе средней школы. Кроме знания такой теории, связанной с изучением свойств некоторых функций, численных неравенств, векторов, очень важно формирование умений применять теорию для решения конкретных задач, - представить задачу в свете того или иного применяемого приёма или метода. Многие из рассматриваемых задач решаются различными способами, что позволяет составить мнение о целесообразности применения того или иного метода для решения поставленной задачи, что является основой формирования математической интуиции. Данный курс разбит на несколько разделов, в каждом из которых изучается методы и приёмы, предопределяемые рассматриваемым теоретическим материалом. Среди рассматриваемых вопросов: методы функциональной и тригонометрической подстановки, использование численных неравенств, использование монотонности и ограниченности функций, использование координатного и векторного метода, методы решения симметрических уравнений и уравнений, содержащих целые или дробные части числа, решение планиметрических задач.

Программа также рассчитана на подготовку выпускников 11-х классов для успешной подготовки к поступлению в ВУЗ на технические специальности. Данный курс, включает в себя четыре раздела. Первый раздел предназначен для отработки методики решения задач, предлагаемых на дополнительных экзаменах при поступлении в ВУЗ. На изучение первого раздела отводится 36 часов, он включает в себя 6 основных тем, хотя изучение каждой из которых предполагает решение задач, сопряжённых со знанием материала из различных разделов математики, таких как планиметрия, решение задач с параметрами, векторный и координатный методы решения задач. Второй раздел (10 часов) предназначен для подготовки к участию в предметных олимпиадах, проводимых ВУЗами для льготного отбора абитуриентов. Третий и четвёртый раздел предполагает подготовку к вступительным экзаменам в ВУЗы. Этот раздел наиболее актуален в качестве подготовки в конкретный ВУЗ, так как каждое высшее образовательное учреждение формирует свой банк наиболее типичных задач, решать которые без предварительной подготовки бывает очень затруднительно. Весь курс завершается четырёхчасовой тестовой работой, по результатам которой можно получить представление о готовности выпускника к сдаче школьных экзаменов и поступлению в ВУЗ.

Содержание

Метод функциональной подстановки. Метод тригонометрической подстановки

Методы, основанные на применении численных неравенств. Методы, основанные на использовании монотонности функций. Методы решений функциональных уравнений.

Методы, основанные на использовании векторов. Методы, основанные на использовании ограниченности функций. Методы решения симметрических систем уравнений.Методы решения уравнений, содержащих целые или дробные части числа.

Планиметрические задачи. (Замечательные точки треугольника). Планиметрические задачи (Четырёхугольники). Планиметрические задачи (Многоугольники). Стереометрические задачи. Рациональные уравнения и неравенства, решаемые нестандартными методами. Иррациональные уравнения, текстовые задачи, системы уравнений, решаемые нестандартными методами Тригонометрия. Показательные, логарифмические уравнения и неравенства, решаемые нестандартными методами. Производная и её применение при решении нестандартных задач. Решение задач со смешанной тематикой. Выбор оптимального способ решения. Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников СибГИУ. Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников ТГУ. Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников МФТИ. Сложные задачи Стереометрии для поступающих в ВУЗ. Сложные задачи планиметрии для поступающих в ВУЗ. Решение задач вступительных экзаменов МФТИ. Решение задач вступительных экзаменов МГУ. Задачи из вступительных экзаменов в различные ВУЗы.

Тематическое планирование 10 класс

№	Тема	Кол-во часов
1.	Метод функциональной подстановки	4
2.	Метод тригонометрической подстановки	4
3.	Методы, основанные на применении численных неравенств	6
4.	Методы, основанные на использовании монотонности функций	4
5.	Методы решений функциональных уравнений.	6
6.	Методы, основанные на использовании векторов.	6
7.	Комбинированные методы.	4
8.	Методы, основанные на использовании ограниченности функций.	4
9.	Методы решения симметрических систем уравнений.	6
10.	Методы решения уравнений, содержащих целые или дробные части числа.	4
11.	Планиметрические задачи. (Замечательные точки треугольника)	6
12.	Планиметрические задачи (Четырёхугольники)	6
13.	Планиметрические задачи (Многоугольники)	4
14.	Некоторые стереометрические задачи.	6
	Итого:	70

Тематическое планирование 11 класс

№	Тема	Кол-во часов
1.	Рациональные уравнения и неравенства, решаемые нестандартными методами.	6
2.	Иррациональные уравнения, текстовые задачи, системы уравнений, решаемые нестандартными методами	6
3.	Тригонометрия.	6
4.	Показательные, логарифмические уравнения и неравенства, решаемые нестандартными методами	6
5.	Производная и её применение при решении нестандартных задач.	6
6.	Решение задач со смешанной тематикой. Выбор оптимального способ решения.	6
7.	Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников СибГИУ	4
8.	Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников ТГУ	4
9.	Задачи ВУЗовских олимпиад для школьников МФТИ	4
10.	Сложные задачи Стереометрии для поступающих в ВУЗ	4
11.	Сложные задачи планиметрии для поступающих в ВУЗ	6
12.	Решение задач вступительных экзаменов МФТИ	4
13.	Решение задач вступительных экзаменов МГУ	4
14.	Задачи из вступительных экзаменов в различные ВУЗы.	2
15.	Репетиция экзамена ЕГЭ	4
	Итого	70

Литература

1. Акимова С. Занимательная математика. – Санкт-Петербург: Издательство «Тригон», 1997 – с.608.
2. Виленкин Н. Я. За страницами учебника математики 10 – 11 класс. – Москва: Издательство «Просвещение», 1996 – с.319.
3. Малинин В. Журнал «Математика», № 21, 2001г., с.–6.
4. Малинин В. Журнал «Математика», № 22, 2001 г., с.–4.
5. Сеть Интернет

(http://www.saslib.ru/ref/arh/25/VPV-1330//index.html).

6. Школьная энциклопедия. Математика. / под редакцией Никольский С. М. – Москва: Издательство «Большая российская энциклопедия», 1996 – с.648.
7. Энциклопедия для детей Т. 11 (Математика) / под редакцией М. Д. Аксёнова – Москва: Издательство «Аванта +», 1998 – с.688.
8. Энциклопедический словарь юного математика / под редакцией Гнеденко Б. В. – Москва: Издательство «Педагогика», 1985 – с. 350.

1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – Москва, 1875.
2. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. –Минск, 1979.
3. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – Москва, 1998.
4. Васильев Н. Б., Тутенмахер В. Л. Заочные математические олимпиады. – Москва, 1986.
5. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – Москва, 1974.
6. Гальперин Г. А., Тольпыго А. К. Московские математические олимпиады. – Москва, 1986.
7. Генкин С. А., Интенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994.
8. Егоров А. А. О дискриминанте. – Приложение к журналу «Квант», № 2/1994. с – 117.
9. Задачи математических олимпиад школьников Нижегородской области. – Н. Новгород, 1998.
10. Заочные математические олимпиады. – Москва, 1981.
11. Курляндчик Л. Метод бесконечного спуска. – Приложение к журналу «Квант», №3/1999.
12. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Т. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. – Москва, 1991.
13. Малинин В. А. Подготовка учащихся 9-11 классов к математическим олимпиадам. Задачи с целыми числами. – Н. Новгород, 2000.
14. Постников М. М. Теорема Ферма. – Москва, 1978.
15. Сивашинский И. Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. – Москва, 1971.
16. Яковлев Г. Н. Всесоюзные математические олимпиады школьников. – Москва, 1992.

Приложение

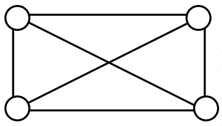
Олимпиадные задачи (Графы)

Многие геометрические, комбинаторные задачи хорошо решаются при использовании теории графов(объекты плоскости, состоящие из точек плоскости, отрезков их соединяющих(количество рёбер не менее 2)). Чаще всего в задачах такого рода необходимо:

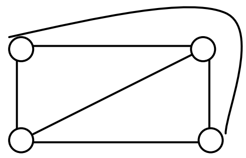
1) Определить можно ли добраться из одного пункта в другой при существующей системе дорог, линий сообщений.
2) Расположить определённым образом или доказать возможно ли это (переставить) на плоскости (шахматной доске, таблице..) некоторые объекты(фишки, фигуры), используя некоторые правила перемещения
3) Геометрические задачи на разбиение некоторой фигуры на более простые, доказательства существования плоской фигуры с определённым количеством вершин, рёбер и удовлетворяющим ещё некоторым условиям(пересечение рёбер,..)

Перечислим некоторые определения и теоремы:

- степень вершины графа – количество выходящих из неё вершин
- число нечётных вершин любого графа чётно.
- Путь – последовательность рёбер, для которых начало второго – это конец предыдущего.
- Замкнутый путь – кольцо
- Связный граф – граф у которого любые две вершины можно соединить путём.
- Дерево – связный граф без циклов.
- Плоский граф – граф, который можно нарисовать так, что рёбра его не пересекаются.(правильно нарисованный плоский граф – если на рисунке его рёбра не ппересекаются)



-плоский граф, так как для него можно подобрать изоморфный(правильно нарисованный)



- Изоморфные графы – графы с равным количеством вершин которые можно занумеровать так, что если соединены две вершины первого, то соединены две соответствующие вершины второго графа.
- Эйлеровы графы – графы которые можно нарисовать не отрывая руки, проходя через каждую точку только один раз.
- Формула Эйлера для плоского связного графа: Р+2=В+Г (Р- количество рёбер, В- количество вершин, Г- количество кусков плоскости(граней))

(Будем в некотором связном графе убирать рёбра таким образом, чтобы количество вершин оставалось неизменным и граф оставался связным. При этом после каждой операции количество рёбер и количество кусков плоскости будет уменьшаться на единицу. В конце получим дерево, в котором количество вершин больше на 1 чем количество рёбер, кусков пространства останется только один.)

- Для плоского графа справедливо неравенство: $2P \geq 3\Gamma$

(для дерева (Р>1)) неравенство выполняется(Г=1), для кольца(предельный случай-треугольник) разбиение грани на три влечёт за собой увеличение количества рёбер на 3)

- Для любого плоского графа выполняется: $P \le 3B - 6$ (Подставив неравенство $2P \ge 3Г$ в формулу Эйлера получим доказываемое неравенство)
- Ориентированные графы – графы на рёбрах которых заданы направления(расставлены стрелки)

Разберём несколько задач:

1) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50x600 клеток. Какое наибольшее количество верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

(Данная сетка есть плоский граф у которого 51*600+601*50= 60650 рёбер и вершин 51*601=30651 Найдём сколько рёбер можно удалить для того, чтобы граф оставался связным и не содержал колец. Такой граф есть дерево у которого количество кусков плоскости Г=1, а количество вершин сохраняется. Для того, чтобы граф оставался связным необходимо, чтобы выполнялось уравнение Эйлера. Итак Р+2=30651+1; Р=30650. Тогда удалить можно 60650-30650=30000 верёвочек)

2) В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата, так что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

(Для получившегося плоского графа подсчитаем количество рёбер: Каждое ребро ограничивает два куска и все куски –есть треугольники кроме внешнего, ограниченного четырёхугольником, поэтому 2Р=3(Г-1)+4, откуда $P = 2 + \dfrac{3Г - 3}{2}$.

Теперь в силу того, что граф плоский и связный должно выполняться уравнение Эйлера: $2 + \dfrac{3Г - 3}{2} + 2 = Г + 24 \Rightarrow Г = 43$ И окончательно количество треугольных кусков 42.)

3) Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения

Б		Б
Ч		Ч

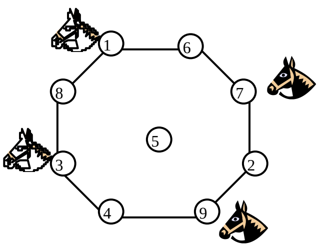
Расположить их таким образом:

Б		Ч
Ч		Б

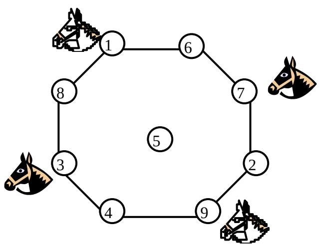
(Для удобства пронумеруем клетки например таким образом:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Пусть каждой клетке соответствует вершина плоского графа, которые соединены в том случае, если из одной клетки в другую можно попасть за один ход. Изобразим такой граф:



Из рисунков видно, что для того чтобы из начального расположения коней получить конечное необходимо перескочить через вершину, чего сделать невозможно, так как фигуры могут перемещаться только последовательно по кругу.)



И ещё несколько задач для самостоятельного решения:

На конференции участвуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый из учёных сидел со знакомыми этим четверым людьми.

В стране 100 городов, некоторые из них соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого города(возможно с пересадками) Докажите, что можно побывать в каждом городе , совершив не более 196 перелётов.

В стране на всех дорогах введено одностороннее движение, причём из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать , проехав не более, чем по трём дорогам.

Комбинаторика

Основные определения:

1) Декартово произведение двух множеств – множество пар элементов этих множеств, причём в каждой паре первый элемент из первого множества, второй элемент из второго множества. Например $\{1,2,3\}\times\{3,5,6\}=\{(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(3,3),(3,5),(3,6)\}$ Очевидно вес декартового произведения $n\cdot m$, где n,m- вес первого и второго множеств.
2) Кортеж – последовательность элементов, возможно повторяющихся – или элемент декартового произведения нескольких множеств. Например $\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{3\}$ содержит кортежи (1,1,3), (1,2,3),(2,1,3),(2,2,3)
3) Размещения n элементов по m позициям с повторениями - $\overline{A}_n^m = n^m$ -так как это есть количество кортежей в декартовом перемножении(m -раз) множества из n-элементов.
4) Размещения n элементов по m позициям без повторений - $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ - количество кортежей в которых нет одинаковых элементов. Так как в первую позицию можно выбрать один элемент из n, во вторую – один элемент из n-1 и т.д., то всего кортежей с неповторяющимися элементами $n(n-1)(n-2)...(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$
5) Перестановки (без повторений) – Если все места заполнены неповторяющимися элементами, то количество возможных перестановок $P_n = A_n^n = n!$
6) Сочетания (без повторений) – количество всех возможных подмножеств весом m из данного множества весом n $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$ - так как из каждого подмножества можно получить m! перестановок, соответственно количество подмножеств в m! раз меньше, чем количество размещений без повторений.
7) Количество всех возможных подмножеств множества из n элементов. $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = \sum_{i=0}^{n}\dfrac{n!}{(n-i)!\,i!} = 2^n$ Покажем это на примере формулы бинома Ньютона.

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}\cdot C_n^i$ - видим, что количество слагаемых с i-той степенью числа a – количество сочетаний из n по i, так как a^i можно получить перемножением любых i чисел a из n числа сомножителей $(a+b)$. Заметим, что количество всех слагаемых при раскрытии бинома $(a+b)^n$ равно количеству размещений с повторениями двух элементов по n позициям, то есть $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$.

8) Заметим, что $C_n^i = C_n^{n-i}$ так как $C_n^i = \dfrac{n!}{(n-i)!\,i!} = \dfrac{n!}{(n-n+i)!\,(n-i)!} = C_n^{n-i}$
9) Заметим, что $C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$ так как C_{n-1}^i - количество подмножеств без одного элемента, а C_{n-1}^{i-1} - количество подмножеств обязательно содержащих один элемент. Или по формулам

$$C_n^i = \frac{(n-1)!}{(n-i+1-1)!\,(i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!\,i!} = \frac{(n-1)!\,(i+n-i)}{(n-i)!\,i!} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

10) Для нахождения количества сочетаний(коэффициентов формулы бинома Ньютона) удобно использовать треугольник Паскаля:

													n
						1(C_0^0)							0
					1C_1^0		1C_1^1						1
				1C_2^0		2C_2^1		1C_2^2					2
			1		3		3		1				3
		1		4		6		4		1			4
	1		5		10		10		5		1		5
1		6		15		20		15		6		1	6

Видим, что каждый коэффициент – есть сумма соседних чисел, находящихся строкой выше.

11) Перестановки с повторениями $P_{(m_1, m_2, \dots m_k)}$, где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ - всего количество позиций , $m_1, m_2, \dots m_k$ – количества каждого из элементов. При заполнении всех позиций $P_{(m_1, m_2, \dots m_k)} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ так как зафиксировать позиции для первого элемента можно $C_n^{m_1}$ -способами, из оставшихся позиций для второго элемента можно зафиксировать места $C_{n-m_1}^{m_2}$ способами и так далее для каждого элемента, то количество всех возможных перестановок

$$P_{(m_1, m_2, \dots m_k)} = C_n^{m_1} \cdot C_{n-m_1}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n-m_1-m_2-\dots-m_{k-1}}^{m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

Перестановки с повторениями часто используются для составления различных слов из фиксированного набора букв(палиндромы).

12) Сочетания с повторениями. $\overline{C}_n^{\,l} = P_{(l, n-1)}$, где $\sum_{i=1}^{n} m_i = l \geq n, где$ кждое $m_i \in \{0,1,2 \dots n\}$ Сочетания с повторениями – это есть количество различных наборов длины *l*, составленных из данных элементов, причём состав этих наборов различен. Для нахождения количества таких наборов достаточно найти всех возможных кортежей $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, для которых $\sum_{i=1}^{n} m_i = l$.

Закодируем каждое число m_i с помощью набора подряд идущих единиц, так например 5 =11111, 0=0, начало следующего числа m_{i+1} -тоже 0. В этом случае для кодирования одного кортежа количеств элементов потребуется *l* единиц и n-1 нулей, например (2,3,0,0,1)=1101110001. Всего различных перестановок l единиц и n-1 нулей и соответственно количество различных кортежей

$P_{l,n-1} = \frac{(l+n-1)!}{l!(n-1)!} = C_{n+l-1}^{l} = \overline{C}_n^{\,l}$ Сочетания с повторениями используются для составления слов определённой длины из перечисленных букв.

Элементы теории вероятности.

В природе существует много задач, в которых условия не однозначно определяют конечный результат. Обычно это связано с тем, что факторов, влияющих на конечный результат, очень много. Для оценки результата, который может получиться в подобных задачах, используются понятия случайной величины и вероятности.

Назовём вероятностным пространством – конечное множество всех возможных исходов какого-либо опыта. Тогда пусть вероятность всех возможных исходов равна единице. Вероятность некоторого исхода при N испытаний определяется, как отношение количества испытаний, в которых произошёл этот исход к общему количеству испытаний: $p_i = \frac{N_i}{N}$. Если вероятность всех исходов одинакова, то вероятность одного из них $p_i = \frac{1_i}{N}$

Любое подмножество вероятностного пространства называют событием. Говорят, что исходы, входящие в это множество - благоприятствующие данному событию. Вероятность события – сумма вероятностей всех исходов, благоприятствующих ему.

(задача: что вероятнее при бросании двух костей 7 или 8 очков?

Решение: Всего возможных пар 6*6=36, тогда вероятность одного исхода $\frac{1}{36}$. 7 очков может выпасть 6 –способами (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1), а 8 очков пятью способами. Тогда вероятность того, что выпадет 7 - $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, а 8 - $\frac{5}{36}$. Вероятнее, что выпадет 7 очков.)

Теперь дадим определения отношений различных событий:

1) Невозможное событие – нет благоприятных исходов
2) Объединение событий – включает благоприятные исходы этих событий
3) Пересечение событий – содержит исходы, благоприятные для всех этих событий.
4) Несовместные события – нет общих благоприятных исходов
5) Противоположные события – несовместные события, но каждый исход принадлежит одному из событий.
6) Следствие события – включает в себя все исходы исходного события.
7) Разность событий x и y – все исходы x, не благоприятствующие y.
8) Независимые события – изменения вероятности одного события не влечёт за собой изменение вероятности другого события.

Несколько соотношений вероятностей событий.

1) Если события X и Y одного вероятностного пространства несовместны, то $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y)$ - формула сложения
2) Вероятность противоположных событий равна 1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
3) Если события X и Y одного вероятностного пространства независимы то
   $p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y)$
   $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(A)p(B)$
4) Если события X и Y одного вероятностного пространства независимы, то независимы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а также $\overline{X}$ и Y, X и $\overline{Y}$

5) Если вероятность появления события в некотором опыте равна p, то вероятность его появления в N таких независимых опытов: $p(\bigcup_{i=1}^{N} A) = 1 - p\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{N} A}\right) = 1 - p\left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{A}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N} p(\overline{A}) = 1 - (1-p)^N$ и при бесконечно большом количестве опытов стремится к единице $\lim_{N\to\infty}(1-(1-p)^N) = 1$

6) Условная вероятность. Очевидно, что при появлении дополнительной информации о проводимых опытах(разведка донесла) может измениться вероятность событий. В этих случаях часть исходов данного вероятностного пространства может быть исключена. Таким образом вероятность исходов не благоприятствующих дополнительной информации обратится в ноль, как и событий, противоречащих дополнительной информации. Вероятность исходов, благоприятствующих дополнительной информации должна увеличиться в одно и то же количество раз, а именно в число $\frac{1}{p(X)}$,где X- событие, соответствующее дополнительной информации. Это видно из того, что вся вероятность должна распределиться между оставшимися исходами, а сумма их вероятностей до поступления дополнительной информации - это есть вероятность p(X). Итак, запишем формулу для вычисления вероятности события после поступления дополнительной информации, или для вычисления условной вероятности некоторого события A относительно события X (то есть при условии, что выполняется событие X) : $p(A \mid X) = \frac{p(A \cap X)}{p(X)}$ - поясним, что $p(A \cap X)$- это вероятность исходов события A, благоприятствующих X до поступления дополнительной информации(X). Полученную формулу можно переписать в виде $p(A \cap X) = p(X)p(A \mid X)$ - формула умножения.

7) Формула полной вероятности: $p(A) = p(X_1)p(A \mid X_1) + ... + p(X_n)p(A \mid X_n)$, где A-некоторое событие, $X_1 + X_2 + ... + X_n = U$ - вероятностное пространство, представленное в виде объединения попарно несовместных событий. Для доказательства заметим, что $A = A \cap U = A \cap X_1 \cup A \cap X_2 ... \cup A \cap X_n$ и так как события $A \cap X_1, A \cap X_2,\ ... A \cap X_n$ - попарно несовместны, то по формуле сложения $p(A) = p(X_1)p(A \mid X_1) + ... + p(X_n)p(A \mid X_n)$

8) Формула Байеса: $p(X_i \mid A) = \frac{p(X_i)p(A \mid X_i)}{p(X_1)p(A \mid X_1) + ... + p(X_n)p(A \mid X_n)}$

Получается из формулы полной вероятности так как $\frac{p(X_i)p(A \mid X_i)}{p(X_i \mid A)} = \frac{p(X_i)p(A \cap X_i)p(A)}{p(X_i)p(X_i \cap A)} = p(A)$ - эта формула используется для вычисления вероятности справедливости одной из гипотез(гипотезы попарно несовместны и охватывают все возможные исходы) при условии, что произошло некоторое событие A.

9) Закон больших чисел: При бесконечно большом количестве независимых испытаний относительная частота встречаемости некоторого события A, имеющего вероятность p стремится к значению вероятности этого события(p).

$$\lim_{N\to\infty} \frac{m_{(A)}}{N} = p(A)$$

10) Формула Бернулли: Вероятность p_{mn} того, что из серии n независимых испытаний событие A, имеющее вероятность p встретится m раз равна:

$p_{mn} = C_n^m p^n (1-p)^{n-m}$ Для доказательства заметим, что из каждой серии из n испытаний условию будут благоприятствовать только те, в которых событие A встретилось m раз и всего таких различных серий - $P_{(m,n-m)} = C_n^m$,а вероятность каждой серии $p^n (1-p)^{n-m}$ -(произведение вероятностей произошедших независимых событий)

11) Для оценки того, сколько серий опытов необходимо провести, чтобы относительная частота $\frac{m}{n}$ встречаемости события отличалась от его вероятности не более чем на величину a Чебышевым было введено неравенство: $p(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a) < \frac{p(1-p)}{a^2 n}$

12) Геометрические вероятности. Для многих событий невозможно определить конечное число исходов, например при разламывании карандаша невозможно перечислить все комбинации длин получившихся обломков. В таких случаях прибегают к геометрической интерпретации вероятности, то есть значению вероятности ставится в соответствие отношения размеров некоторых геометрических объектов.

Олимпиадные задачи. Численные неравенства.

Многие нестандартные задачи на доказательства неравенств и решения уравнений и систем эффективно решаются с использованием известных численных неравенств:

1) Неравенство Коши : $\dfrac{a_1 + a_2 + ..a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, *где* $n \ge 2, a_i \ge 0$ Неравенство превращается в равенство, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Частный случай неравенства Коши для чисел a и $\dfrac{1}{a}$: $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$

2) Неравенство Бернулли: $(1+x)^p \ge 1 + p \cdot x$ - для $p < 0$ или $p > 1$ и $x > -1$

$(1+x)^p \le 1 + p \cdot x$ - для $1 > p > 0$ и $x > -1$

Неравенство превращается в равенство при x=0.

3) Неравенство Коши- Буняковского:

$(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$ Неравенство превращается в равенство только при условии $x_i = k \cdot y_i$ - то есть когда соответствующие числа x и y пропорциональны.

Следствием неравенства Коши- Буняковского является неравенство:

$(a+b)^n \le 2^{n-1}(a^n + b^n)$

Для решения алгебраических задач напомним, что $s_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2$,

$s_3 = \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3$ где $s_2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, $s_3 = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3$,

$\alpha_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $\alpha_2 = x_1x_2 + x_1x_3 ... + x_{n-1}x_n$, $\alpha_3 = x_1x_2x_3 ... x_{n-1}x_n$

Разберём несколько задач:

1) Доказать, что $\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^n + \left(\dfrac{c+b}{a}\right)^n + \left(\dfrac{a+c}{b}\right)^n \ge 3 \cdot 2^n$

(Воспользуемся неравенством Коши:)

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n + \left(\frac{c+b}{a}\right)^n + \left(\frac{a+c}{b}\right)^n \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{c}\right)^n \left(\frac{c+b}{a}\right)^n \left(\frac{a+c}{b}\right)^n} = 3\left(\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\right)^n \ge$$

$$\ge 3\left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}\,2\sqrt{bc}\,2\sqrt{ac}}{abc}}\right)^n = 3 \cdot 2^n$$

2) Доказать, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ то $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \le 1$

(Обозначим $p = a + b + c, q = ab + bc + ac$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q = 1$

Применим неравенство Коши- Буняковского

$(a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow p^2 \le 3$. Так как $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = p^3 - 3pq$, то если мы докажем $p^2 \le 3 \Rightarrow | p^3 - 3pq | \le 1$, то решим поставленную в условии задачу. Так как $q = \dfrac{p^2 - 1}{2}$, то решим $\begin{cases} -2 \le 3p - p^3 \le 2 \\ -\sqrt{3} \le p \le \sqrt{3} \end{cases}$. Для этого найдём экстремумы функции $f(p) = 3p - p^3$, $f'(p) = 3 - 3p^2$. В точках экстремума f(1)=2, f(-1)=-2, где f(1)-локальный максимум, f(-1) – локальный минимум, других экстремумов нет, $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$. Из этого делаем вывод о том, что данное в условии неравенство выполняется.

3) Решить уравнение $\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}} = 2$
(Применив к слагаемым неравенство Бернулли получим
$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}} \le 1 + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{4} + 1 + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{4} = 2$ Это неравенство превращается в равенство при $\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$)

4) Решить уравнение $16\sin^4 x + \cos^4 y = 8\sin y\cos x - 2$
(Оценим левую часть уравнения используя неравенство Коши:
$8\sin^2 x\cos^2 y \le 8\sin x\cos y - 2 \Rightarrow (2\cos x\sin y - 1)^2 \le 0 \Rightarrow \cos x\sin x = \dfrac{1}{2}$. Используя это перепишем исходное уравнение и упрощая получим
$\cos^2 x + 4\sin^2 y = 2; (\cos x + 2\sin y)^2 - 4\cos x\sin y = 2 \Rightarrow \cos x + 2\sin y = \pm 2$ Итак решением данного уравнения будет решение совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x + 2\sin y = 2 \\ \sin y\cos x \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x + 2\sin y = -2 \\ \sin y\cos x \end{cases} \end{array}\right.$)

Ещё задачи:

Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + \sqrt{1-z^2} = 2 \end{cases}$

Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x\cos y$

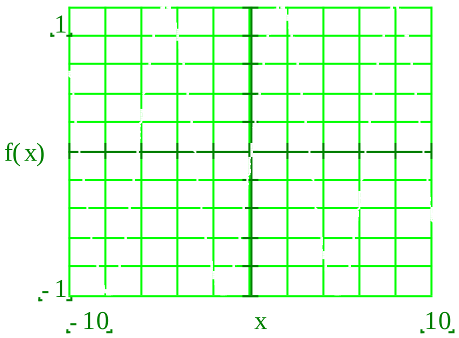
Обратные тригонометрические функции.

1. Найдите значения и заполните таблицу:

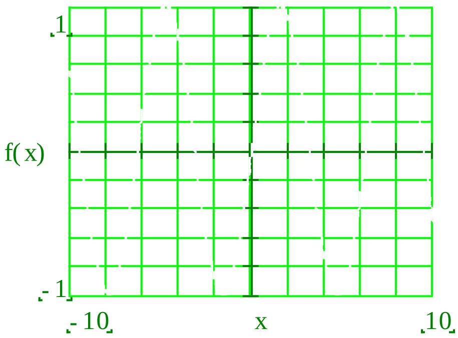
$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$		$arctg(0)=$		$\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{2}{5}\right)\right)=$		$\cos(arctg(2))=$	
$\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$		$arctg(-\sqrt{3})=$		$\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=$		$\sin(arcctg(-3))=$	
$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$		$\arcsin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$		$\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)=$		$\cos(arcctg(-2))=$	

2. Постройте графики:

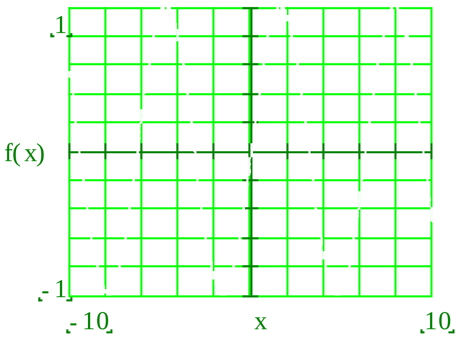
1) y=arcsin(x-2)



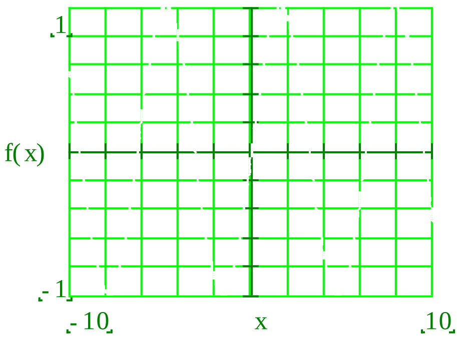
2) y=3+arctg(x)



3) y=|arcsin(x)|



4) y=arctg|x|



3. Найдите значения:

$\cos\left(2\cdot\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)=$		$\arccos\left(\cos\dfrac{10}{9}\pi\right)=$		$arctg\left(tg\dfrac{5}{7}\pi\right)=$	
$\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{2}{9}\right)\right)=$		$arctg\left(ctg\dfrac{8}{9}\pi\right)=$		$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)=$	