А.В. Марков
Л.В. Шестакова
В.Н. Пересыпкин

Открытая олимпиада по математике имени заслуженного учителя РФ Д.Н. Хомякова

СБОРНИК ЗАДАЧ

МБ НОУ «ЛИЦЕЙ №11»

А.В. Марков, Л.В. Шестакова, В.Н. Пересыпкин

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ ИМЕНИ ЗАСЛУЖЕННОГО УЧИТЕЛЯ РФ Д.Н. ХОМЯКОВА

Сборник задач
2009-2015 г.

г. Новокузнецк
2015 г.

ББК 32.97

Марков А.В., Шестакова Л.В., Пересыпкин В.Н.

Открытая олимпиада по математике имени заслуженного учителя РФ Д.Н. Хомякова. Сборник задач. 2009-2015 г. / А.В. Марков, Л.В Шестакова, В.Н Пересыпкин. – Новокузнецк : МБ НОУ «Лицей №11», 2015. – 61 с.

Справочник предназначен для подготовки обучающихся к олимпиаде.

В настоящем издании собраны все задания с решением математической олимпиады им Д.Н. Хомяковаза с 2009 по 2015 год для обучающихся 8 – 11 классов.

Компьютерная верстка Е.А. Пищальникова

Дизайн обложки А.С. Юнкман

ББК 32.97

Введение

В 60-х годах прошлого века в школе № 11 начал свою трудовую деятельность педагог-новатор, учитель математики Хомяков Дмитрий Никифорович. По его инициативе были открыты первые в Новокузнецке классы с углубленным изучением математики. На протяжении почти сорока лет Дмитрий Никифорович завораживал ребят своим талантом, преданностью своему делу и необыкновенной жизненной простотой, порядочностью и скромностью. Год за годом выпускники одиннадцатой прославляли имя своего учителя. Сегодня ученики Дмитрия Никифоровича – это доктора и кандидаты наук, заведующие кафедрами и деканы факультетов, работающие в различных вузах нашей страны. Многие работают в вузах за рубежом.

По инициативе учителей, работавших в разное время с Дмитрием Никифоровичем, выпускников лицея 25 февраля 2009 года стартовала Открытая городская олимпиада имени Дмитрия Никифоровича Хомякова, заслуженного учителя РФ, преподавателя математики, жизнь которого оборвалась от рук бандитов.

Комментарии представителей оргкомитета и участников.

«Дмитрий Никифорович проработал в нашей школе более 30 лет и был «неправильным» учителем. Специально приехав в Новокузнецк из Новосибирска в далекие 60-е годы, чтобы работать, жить и учить здесь школьников, он, одним из первых в России, начал профильное обучение математике. Однако это было только поводом для нашего решения проводить олимпиаду! Основной мотивацией для нас был сам Дмитрий Никифорович – великий учитель и талантливый человек. Ученики, приходя на его уроки, получали не только математические знания, но безмерное наслаждение от общения с ним. Я думаю, что все согласятся со мной, что Дмитрий Никифорович – Человек и Учитель с большой буквы!

Идею олимпиады поддержал Комитет образования и науки города Новокузнецка. Все школы, которые мы пригласили, активно откликнулись на наш призыв и выставили свои команды. Неоспоримым достоинством конкурса стала его объективность. Учителя оценивают работы строго по критериям. Наша олимпиада бесплатная, и это позволяет всем желающим, участвовать в ней. Очень важно не погасить творческий настрой в ребёнке, поддержать желание учиться.

директор МОУ «Лицей №11» В.Н. Пересыпкин

«Идея провести олимпиаду имени Д.Н. Хомякова витала в воздухе уже не первые 12 месяцев. Однако именно с началом нового 2009 года стараниями отдельных КС-овцев (КС-Координационный совет лицея), как равно и сочувствующим им, эта замечательная по своей сути идея проникла в умы и сердца представителей оргкомитета. По сему, в определенный момент олимпиада стала неизбежной.

А для чего эта олимпиада? Конечно, можно перечитать положение, но каждый преследовал свои цели! Остановимся на наиболее альтруистичных:

1. Заинтересовать школьников к изучению математики.
2. Выявить единомышленников, для которых решение сложных задач – удовольствие, а не наказание.
3. Поощрить учащихся, систематически занимающихся математикой.
4. Распространить среди школьников опыт решения олимпиадных задач для дальнейшего успешного участия в олимпиадах различного уровня.
5. Еще раз добрым словом вспомнить замечательного учителя и человека – Хомякова Д.Н.

На мой взгляд, олимпиада удалась, о чем свидетельствует должный интерес к решению задач со стороны школьников и учителей, исключительно положительные отзывы. Радует, что участники демонстрируют оригинальные решения, которые войдут в копилку лучших решений олимпиады»

А.В. Марков – зам. директора, учитель математики профильных классов.

«Человеческая память - странная, избирательная штука. Лавина информации, которая обрушивается на нашу голову ежечасно, стирает порой самые необходимые воспоминания, которые невозможно потерять. Великий учитель – звание не подвластное времени, а если ещё человек чудесный, а если чувство юмора фантастическое и обаяние стопроцентное!.. Редко встретишься за всю жизнь с таким человеком, а вот мне повезло, и не только мне, всем, кому посчастливилось оказаться рядом с Дмитрием Никифоровичем и научиться у него хоть чему-то. Когда я включалась в процесс подготовки Олимпиады имени Д.Н. Хомякова, то хотела встряхнуть, оживить нашу память о Великом Учителе, хотела, чтобы дело его жизни продолжалось нашими замечательными детьми, нашими достойными учителями. Думаю, хоть немного это удалось, а вопросы организации мы решим, ведь все мы – смена Хомякова (очень хочется так себя называть)»

Н.В. Миняйлова – зам.директора, учитель математики.

Олимпиада 2009 год

(7.1) От двух брёвен отпилили по одинаковому куску и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того как от них ещё раз отпилили по такому же куску , второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

Пусть L_1,L_2 – длины соответственно первого и второго бревна, x – длина отрезаемого куска, тогда составим уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{L_1 - x}{L_2 - x} = 3, \\ \dfrac{L_1 - 2x}{L_2 - 2x} = 4; \end{cases} \begin{cases} L_1 - x = 3L_2 - 3x, \\ L_1 - 2x = 4L_2 - 8x; \end{cases} \begin{cases} 2x = 3L_2 - L_1, \\ 6x = 4L_2 - L_1. \end{cases}$$ откуда $5L_2 - 2L_1 = 0 \Rightarrow \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{5}{2}.$

(7.2) Можно ли число 2004 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, и произведение всех этих чисел тоже было равно 2004?

Можно, если это числа: $1002 + 2 + (\overset{1000 раз}{1 + 1 + 1 ...}) = 1002 \cdot 2 \cdot (\overset{1000 раз}{1 \cdot 1 \cdot 1 ...})$.

(7.3) Три рыбака решили сварить на обед уху. Первый рыбак предложил 3 рыбы, второй – пять таких же рыб, а третий, за неимением рыб, заплатил за участие в обеде 16 рублей. Как должны распределить по справедливости между собой эти 16 рублей первый и второй рыбаки , если за обедом все съели поровну?

Всего было поймано 8 рыб и каждый съел по $\frac{8}{3}$ рыбы. Так как первый поймал пять рыб, а второй – три, то на долю третьего от улова первого досталось $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$, а от улова второго $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Тогда деньги должны распределиться между первым и вторым рыбаком в отношении 7:1. То есть первый получит 14 рублей, а второй – 2 рубля.

(7.4) Выписаны подряд все цифры от 1 до 9 включительно. Можно ли, поставив между ними несколько знаков «+» получить в сумме число, равное 450? Число 480?

Попробуем из данной записи выбрать наибольшее число, меньшее чем 450, это 345. До 450 не хватает 450-345 = 105. Теперь выберем наибольшее число меньшее 105, это число 89. До 105 не хватает 105-89=16, а это и есть сумма оставшихся чисел 1+2+6+7. Итак получившийся расклад: 1+2+345+6+7+89. Возможен и другой расклад: 12+345+6+78+9=450. Составить сумму равную 480 невозможно из следующих соображений: I способ: Любая составленная сумма, которую можно представить в виде: $1\cdot10^{k_1}+2\cdot10^{k_2}+3\cdot10^{k_3}+4\cdot10^{k_4}+5\cdot10^{k_5}+6\cdot10^{k_6}+7\cdot10^{k_7}+8\cdot10^{k_8}+9\cdot10^{k_9}$ будет делиться на 9 так как любая натуральная степень десяти имеет остаток 1 от деления на 9 . Это значит, что делимость на 9 любой такая же, как и делимость суммы $1+2+3+4+5+7+8+9=\frac{(1+9)\cdot 9}{2}=45$, которая очевидно делится на 9. Число же 480 на 9 не делится.

II способ: Пусть a и b два подряд идущих числа заданного набора подряд идущих натуральных чисел от 1 до 9. Добавляя плюс между числами a и b, получим разность между новой суммой и предыдущей: $a\cdot10+b-a-b=9\cdot a$- делится на 9. Далее добавляя ещё плюсы получим разности делящиеся на 9. В силу того, что $1+2+3+4+5+7+8+9=\frac{(1+9)\cdot 9}{2}=45$ - делится на 9, то любая составленная таким образом сумма делится на 9, а число 480 на 9 не делится.

(8.1) Имеется шахматная доска 10х10 , 90 шашек и 10 дамок. Играют двое, которые ходят по очереди. Каждый игрок своим ходом может поставить на доску одну дамку, либо от одной до семи шашек. Проигрывает тот, кому при своём ходе нечего ставить. Как должен играть первый игрок, чтобы наверняка выиграть?

Очевидно, что выигрывает тот, кто заканчивает игру(ставит последние фигуры). Пусть мы – первый игрок. Условимся, что на каждый ход противника дамкой, будем отвечать тоже дамкой. В этом случае задача сводится к игре шашками (от 1 до 7) на поле в 90 клеток, наш ход – первый. Для выигрыша своим первым ходом мы должны оставить на поле столько клеток, чтобы их количество можно было представить в виде произведения двух натуральных чисел $m\cdot n$, где n- количество пар ходов (второй игрок-первый игрок), m=8(число до которого мы могли бы дополнить любой ход противника). Далее дополняя ход противника до восьми шашек,- выигрываем (ставим последние шашки). Итак, число 90-х, где х –количество шашек в нашем первом ходу, должно делиться на 8. Это возможно при х=2. Итак, выигрышная стратегия для первого игрока:

1) Первый ход – 2 шашки

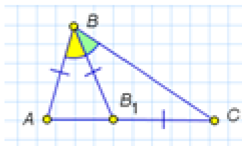
2) На каждый ход противника дамкой, - отвечаем дамкой

3) На каждый ход противника из k шашек, отвечаем ходом из 8-k шашек.

(8.2) Числа x,y,z удовлетворяют равенству $x+y+z-2\cdot(xy+yz+xz)+4xyz=\frac{1}{2}$ Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

Заметим, что $x+y+z-2\cdot(xy+yz+xz)+4xyz-\frac{1}{2}$ - симметрический многочлен третьей степени от трёх переменных, так состоит из линейной комбинации основных симметрических многочленов и константы $-\frac{1}{2}$. Известно, что все произведения вида *(x+a)(y+a)(z+a)* -симметрические многочлены. Возможно данный многочлен такого же вида. Проверим это раскрыв произведение $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)$. В результате получим многочлен тождественный исходному. Если хотя бы одна переменная исходного уравнения равна $\frac{1}{2}$, то равенство выполняется, в противном случае, нет.

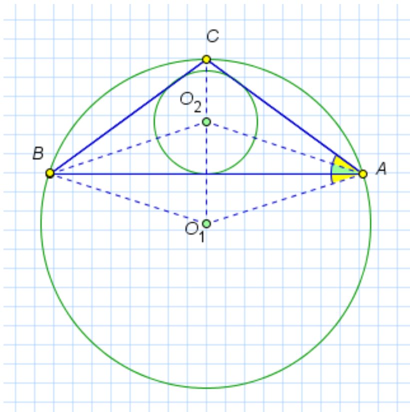
(8.3) Найдите углы треугольника ABC, если биссектриса BB_1 делит его на два таких треугольника, что $AB=BB_1=B_1C$.



Обозначим $\angle ABB_1=\angle CBB_1=\alpha$. Треугольник CB_1B – равнобедренный, поэтому $\angle CB_1B=180°-2\alpha$. $\angle BB_1A=2\alpha$ - как смежный углу CB_1B. В равнобедренном треугольнике ABB_1 сумма углов $\angle B_1BA+\angle BAB_1+\angle AB_1B=\alpha+2\alpha+2\alpha=5\alpha=180°$. Тогда $\alpha=36°$. Углы в треугольнике ABC: $\angle A=\angle B=72°, \angle C=36°$.

(8.4 смотри 7.4)

(9.1 смотри 8.2)



(9.2) Найдите углы такого треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из его сторон.

Пусть центры описанной O_1 и вписанной O_2 окружностей симметричны относительно стороны AB. Тогда треугольник ACB –равнобедренный, треугольники AO_2B и AO_1B – равны, треугольник AO_1C- равнобедренный. Так как O_2A- биссектриса треугольника BAC, то обозначив угол CAO_2 за α, получим что $\angle CAB = 2\alpha, \angle O_1AC = \angle O_1CA = 3\alpha$. Так как $\angle CAB + \angle ACO_2 = 90°$, то $2\alpha + 3\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 18° \Rightarrow$

$\angle CAB = \angle CBA = 36°, \angle ACB = 180° - 72° = 108°$

(9.3) Решите уравнение $(x^2 + 2x + 3)\cdot(2x^4 - 4x^2 + 3) = 2$

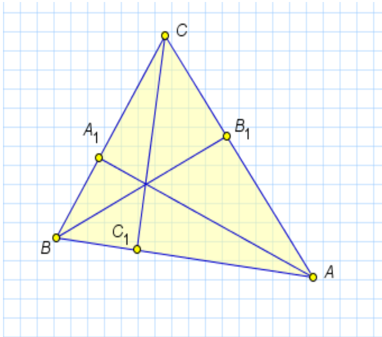
$(x^2 + 2x + 3)\cdot(2x^4 - 4x^2 + 3) = 2; \left((x+1)^2 + 2\right)\cdot\left(2(x^2-1)^2 + 1\right) = 2$. Первый множитель не меньше двух, второй – не меньше одного. Значит $\begin{cases} x+1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow x = -1.$

(9.4) В математической олимпиаде участвовали 100 учащихся. Было предложено четыре задачи. Первую задачу решили 95 человек, вторую – 85, третью – 65, четвёртую – 55. Ни кто не решил все задачи, а награждены были те учащиеся, которые решили третью и четвёртую задачи. Сколько учащихся было награждено?

Задачи №3 и №4 решили как минимум 55+65-100=20 чел.

Задачи №1 и №2 решили как минимум 85+95-100=80 чел. Задачи №1, №2, №3, №4 решили как минимум 20+80-100=0 чел. Тогда были награждены все 20 человек решившие задачи №3 и №4.

(9.5 смотри 8.1)



(10.1) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1

$AA_1=12$ $BB_1=20$. Доказать, что $CC_1<30$

I способ:

$$2S = AC\cdot 20 = BC\cdot 12 = AB\cdot CC_1 \Rightarrow AC=\frac{S}{10} \quad ,DC=\frac{S}{6}$$

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot DC\cdot\cos\angle C}$$

$$2S=CC_1\cdot\sqrt{\frac{S^2}{100}+\frac{S^2}{36}-\frac{2S^2}{60}\cdot\cos\angle C},CC_1=\frac{60}{\sqrt{34-30\cdot\cos\angle C}}$$ так как

$\cos\angle C\in(-1;1)$ $\quad mo\ CC_1\in(7.5;30)$ то есть $CC_1<30$.

II способ:

Из неравенства треугольника $AB>|AC-BC|$ и так как $AB=\frac{2S}{CC_1},AC=\frac{2S}{BB_1},BC=\frac{2S}{AA_1}$, то $\frac{1}{CC_1}>\left|\frac{1}{AA_1}-\frac{1}{BB_1}\right|$ то есть $CC_1<\frac{AA_1\cdot BB_1}{BB_1-AA_1}$, $CC_1<30$.

(10.2) Решите уравнение: $(x+1)^2-5\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x}+4x=0$

Уравнение $(x+1)^2-5\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x}+4\cdot x=0$ Решим относительно (x+1):

$$(x+1)=\frac{5\cdot\sqrt{x}\pm\sqrt{25x-16x}}{2}=\frac{5\cdot\sqrt{x}\pm 3\cdot\sqrt{x}}{2};\ \left[\begin{array}{l}x+1=4\cdot\sqrt{x},\\ x+1=\sqrt{x};\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-14x+1=0,\\ x^2+x+1=0,\end{array}\right.\\ x\ge 0;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=7+4\sqrt{3}\\ x=7-4\sqrt{3}\end{array}\right.$$

(10.3) Возрастающая последовательность u_n состоит из всех натуральных чисел, делящихся на 2 и на 3, возможно на оба одновременно. Найдите u_{2004}.

I способ: Выпишем элементы последовательности: 2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22… Заметим, что каждый четвёртый элемент кратен шести, а каждый член последовательности можно вычислить по формуле: $u_n = \left[\frac{n}{4}\right]\cdot 6 + ((n)\,\mathrm{mod}(4)+1)\cdot sign\left\{\frac{n}{4}\right\}$, тогда для n = 2004:

$$u_n = \left[\frac{2004}{4}\right]\cdot 6 + ((2004)\,\mathrm{mod}(4)+1)\cdot sign\left\{\frac{2004}{4}\right\} = 501\cdot 6 + 1\cdot 0 = 3006$$

(10.4) Что больше 2004^{2005} или 2005^{2004}?

I способ:

$$2004^{2005} \vee 2005^{2004};\ 2004\cdot 2004^{2004} \vee 2005^{2004};\ 2004 \vee \left(\frac{2005}{2004}\right)^{2004};\ 2004 \vee \left(1+\frac{1}{2004}\right)^{2004}$$

Известно, что $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - возрастающая сходящаяся

последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, тогда

$$2004 > e > \left(1+\frac{1}{2004}\right)^{2004} \Rightarrow 2004^{2005} > 2005^{2004}.$$

II способ: Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$. Докажем, что это последовательность возрастающая: $\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} \vee \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}; (n+1)^{2n+2} \vee (n\cdot(n+2))^{n+1};$

$$(n+1)^2 \vee n\cdot(n+2);\ n^2+2n+1 \vee n^2+2n;\ 1>0 \Rightarrow \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} > \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}.$$ Теперь

достаточно проверить, что уже при n=3:

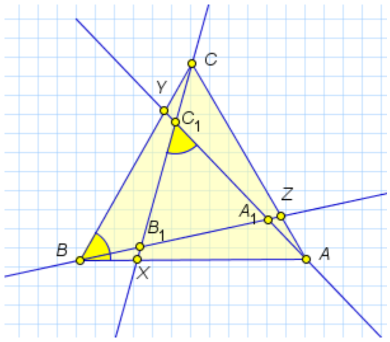
$$x_3 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64} > 1 \Rightarrow x_{2004} = \frac{2004^{2005}}{2005^{2004}} > 1 \Rightarrow 2004^{2005} > 2005^{2004}.$$

(10.5 смотри 9.4)

(11.1 смотри 9.4)

(11.2 смотри 10.4)

(11.3) На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC найти такие точки X,Y,Z(соответственно), чтобы площадь треугольника, образованного прямыми CX, BZ,AY, была вчетверо меньше площади треугольника ABC и чтобы было выполнено условие: $\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CZ}{ZA}$.



Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$-равносторонние. По условию задачи $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=4\Rightarrow\frac{AB}{A_1B_1}=2$. Пусть AB=1, тогда $A_1B_1=\frac{1}{2}$. Пусть BX=AZ=CY=x Треугольник ABZ подобен треугольнику A_1AZ по трём углам $\Rightarrow\frac{AA_1}{AB}=\frac{AZ}{BZ}=\frac{A_1Z}{AZ}$ или $AA_1=\frac{x}{BZ}=\frac{A_1Z}{x}$. Из ΔABZ по теореме косинусов $BZ=\sqrt{x^2+1-x}$, тогда $BB_1=AA_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1-x}}$, $A_1Z=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1-x}}$. Подставим эти выражения в равенство $BZ=A_1B_1+BB_1+A_1Z$:
$\sqrt{x^2+1-x}=\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1-x}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1-x}}$; $\sqrt{x^2+1-x}=2(1-2x)$;

$\begin{cases}5x^2-5x+1=0,\\ x\le\frac{1}{2};\end{cases}$ $x=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Теперь найдём отношение $\frac{CZ}{ZA}=\frac{1-\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(11.4) Найдите два таких натуральных числа, что сумма их суммы, разности, произведения и частного равна 441.

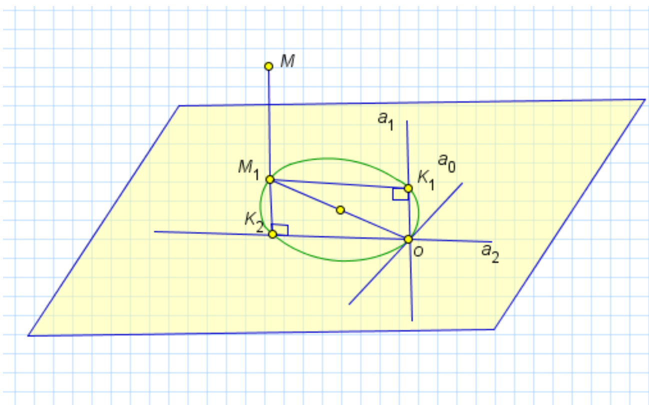
Пусть a,b такие числа, тогда $a+b+a-b+ab+\frac{a}{b}=441$, где $a>b$, $2a+ab+\frac{a}{b}=441$, пусть $a=x\cdot b$,тогда
$2xb+xb^2+x=441;\ x(b^2+2b+1)=441;\ x\cdot(b+1)^2=21^2;\ x(b+!)^2=7^2\cdot3^2;$

$$
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases} x = 9 \\ (b+1)^2 = 7^2 \end{cases} \\
\begin{cases} x = 49 \\ (b+1)^2 = 3^2 \end{cases} \\
\begin{cases} x = 1 \\ (b+1)^2 = 21^2 \end{cases}
\end{array}
\right.
\qquad
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases} x = 9 \\ b = 6;\, 8 \end{cases} \\
\begin{cases} x = 49 \\ b = 2;\, -4 \end{cases} \\
\begin{cases} x = 1 \\ b = 20;\, -22 \end{cases}
\end{array}
\right.
$$

С учётом того, что *a*,*b*-натуральные и $a = x \cdot b$ получаем пары *a*,*b:*

(54;6), (98;2), (20;20).

(11.5) Найдите геометрическое место точек – оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки пространства на прямые, лежащие в заданной плоскости и пересекающиеся в одной точке.



Пусть M – точка вне плоскости, M_1-основание перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки M. Прямые плоскости a_0,a_1,a_2 и т.д. – пересекаются в точке O. Точки O,K_1,K_2 и т.д. – основания перпендикуляров, опущенных из точки M_1 на прямые a_0,a_1,a_2 и т.д. По теореме о трёх перпендикулярах MO,MK_1,MK_2 и т.д. – перпендикуляры соответственно к прямым a_0,a_1,a_2. В силу того, что все углы $\angle M_1K_1O$, $\angle M_1K_2O$ и т.д.- прямые, то M_1O – диаметр окружности, состоящей из точек O,K_1,K_2 и т.д. – это и есть искомое ГМТ.

Олимпиада 2010 год

(8.1) Что больше : $\frac{368\,972}{764\,797}$ или $\frac{368\,975}{764\,804}$?

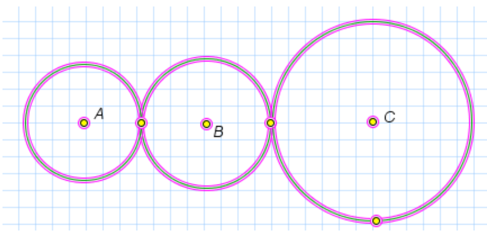
Осуществим переход к алгебраическим выражениям. Пусть a = 368 972 и b =764 797. Теперь рассмотрим следующую разность:

$\frac{a}{b} - \frac{a+3}{b+7} = \frac{7a-3b}{b(b+7)}$, но $7a$ > 7·360000 = 252·10000, $3b$ < 3·770000 = 231·10000, т.е. первая дробь больше.

(8.2) Дано число $\sqrt{36-10\sqrt{11}}-\sqrt{11}$. Рациональное оно или иррациональное?

$$\sqrt{25-10\sqrt{11}+11}+\sqrt{11}=\sqrt{\left(5-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{11}= \left|5-\sqrt{11}\right|+\sqrt{11}=5-\sqrt{11}\text{ - }+\sqrt{11}=5.$$

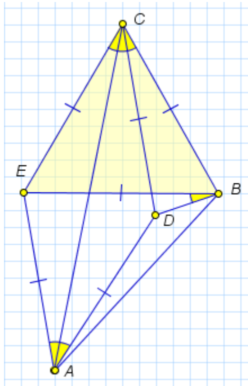
<u>Ответ</u>. Рациональное.



(8.3) Три колеса A, B и C расположены так, как показано на рисунке. Колесо B ведущее. Оно передаёт вращение колёсам A и C посредством трения без скольжения. Пусть длина окружности колеса B равна 12 см, а длина окружности колеса A на 1 см меньше, чем длина окружности колеса C. Колесо C делает на один оборот меньше, чем колесо A, когда колесо B совершает один оборот. Найти диаметры колёс A и C.

Пусть длина окружности колеса A x сантиметров. Тогда длина окружности колеса C равна $x+1$. Число оборотов, которое сделает колесо A, когда колесо B сделает один оборот, равно $\frac{x}{12}$; число оборотов, которое сделает колесо C, равно $\frac{12}{x+1}$. Согласно условиям задачи получаем уравнение, сводящееся к квадратному: $\frac{12}{x}=\frac{12}{x+1}+1$. Откуда $x_1=3$, $x_2=-4$. Второй корень квадратного уравнения смыслу задачи не удовлетворяет. Следовательно, диаметр колеса A равен $\frac{3}{\pi}$ см, диаметр колеса C равен $\frac{4}{\pi}$ см. <u>Ответ.</u> $\frac{3}{\pi}$ см , $\frac{4}{\pi}$ см.

(8.4) В треугольнике ABC угол C равен 40°, на его биссектрисе отмечена точка D так, что треугольник BDC равнобедренный ($BC = DC$), угол DAC равен 20°. Найти величину угла ABD.

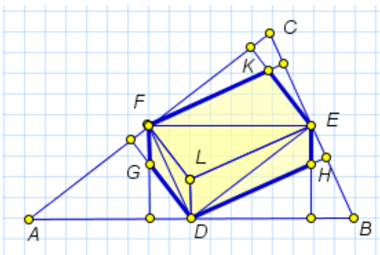


Достраиваем равнобедренный треугольник ADC до ромба $ADCE$, соединяем точки A и E отрезком прямой. В треугольнике BEC стороны BC и CE равны по построению, а угол BCE равен 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний. Треугольник ABE равнобедренный (AE = BE). Угол BEA равен $140° - 60° = 80°$. Поэтому угол BAE равен $\frac{180°-80°}{2} = 50°$ и угол BAD равен $50°–2·20° = 10°$. Угол ADB, следовательно, равен 140°. Тогда угол ABD равен $180° - 140° - 10° = 30°$.

(8.5) Доказать, что если n – натуральное число, то $n^2 + n + 2$ не делится на 15.

Допустим, что $n^2 + n + 2 = 15k$, где k – целое число. Дискриминант квадратного уравнения относительно n равен:$D = 1 - 4(2 - 15k) = 60k - 7$ не является полным квадратом. Значит, равенство $n^2 + n + 2 = 15k$ невозможно, т.е. $n^2 + n + 2$ не делится на 15.

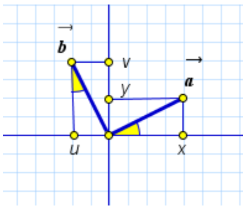
(9.1) Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.



Получившийся шестиугольник DHEKFG в силу параллельности противоположных сторон можно разбить на три параллелограмма DHEL, EKFL, FGDL.Площадь треугольника DEF равна четверти площади треугольника ABC. В свою очередь площадь параллелограмма DHEL в два раза больше площади треугольника DEL, площадь параллелограмма FGDL в два раза больше площади треугольника DFL, площадь параллелограмма EKFL в два раза больше площади треугольника ELF. Так как треугольник DEF состоит из треугольников DEL, DFL и ELF, то получили, что площадь шестиугольника DHEKFG в два раза больше площади треугольника DEF и соответственно в два раза меньше площади треугольника ABC.

(9.2) Докажите, что если $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ и $xu + yv = 0$, то $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ и $xy + uv = 0$

Пусть $\vec{a}$ – вектор с координатами $\{x, y\}$,
$\vec{b}$ – вектор с координатами $\{u, v\}$.Из
уравнений $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ и $xu + yv = 0$ следует, что вектора имеют одинаковую(единичную) длину и перпендикулярны(скалярное произведение равно нулю).



Для таких векторов выполняются равенства: x=v, y=-u (поворот вектора на 90°). Тогда $\vec{d}$ – вектор с координатами $\{x, u\}$ и $\vec{e}$ – вектор с координатами $\{y, v\}$ – перпендикулярны и единичны. То есть выполняются равенства $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ и $xy + uv = 0$.

(9.3) Натуральные числа a,b,c,d,e удовлетворяют условию $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Докажите, что по крайней мере три из них делятся на 5

Остатки от деления натурального числа x на 5: -2,-1,0,1,2. Тогда остатки от деления числа x^4 на 5 соответственно: 1, 0,1,1 (либо 0, либо 1) (остаток от деления степени числа равен остатку степени остатка этого числа). Если e^4 делится на пять, то каждое из слагаемых $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5. Если e^4 имеет остаток 1 при делении на 5, то три слагаемых выражения $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$делится на 5, а одно слагаемое имеет остаток 1 при делении на 5. Получили, что по крайней мере три слагаемых делятся на 5. Из этого следует, что три числа из чисел a,b,c,d делятся на 5.

(9.4) Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек(10x5). Двое играют в такую игру: Начинающий разламывает шоколадку вдоль углубления на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди проделывают это с одной из получившихся частей. Тот кто отломит квадратную дольку(без углублений) – проиграл. Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш?

Попробуем разработать стратегию для выигрыша первого. При этом учтём тот факт, что игрок отломивший кусок плитки размерами 5x1, 4x1,2x2 – проигрывает(после хода противника он отламывает самую маленькую дольку). Итак, если первый игрок разламывает шоколадку на две равные части, то второй игрок вынужден разломить получившийся кусок размером 5x5 на куски 3x2 и 2x2 (в противном случае он отламывает кусок 5x1 и проигрывает). Первому игроку остаётся выбрать кусок 3x2 и разломить его на равные куски 3x1. После этого второй игрок проигрывает.

(9.5 смотри 8.3)

(10.1) Оросительная установка, расположенная в точке О, обслуживает круг радиусом 100 метров с центром в точке О. Такими установками нужно полностью оросить квадратное поле со стороной 1км. Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля. В каких пределах может меняться сторона a такой квадратной сетки?

Для того чтобы оросительные установки охватывали всю площадь внутри клетки необходимо, чтобы радиус действия был не меньше половины диагонали такой клетки. То есть $r \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому $a \leq 100\sqrt{2}$. С другой стороны при расположении сетки в центре поля необходимо, чтобы радиус действия был не меньше, чем расстояние от угла поля до угла сетки: $\frac{(1000-7a)}{2}\sqrt{2} \leq 100$. Итак, получили, что $\begin{cases} a \geq \frac{100(10-\sqrt{2})}{7} \\ a \leq 100\sqrt{2} \end{cases}$ или приблизительно:$a \in [122{,}654; 141{,}421]$.

(10.2 смотри 9.3)

(10.3) Докажите, что число 11..1 (2010 единиц) имеет по крайней мере 28 различных делителей.

Число состоящее из 2010 единиц можно представить в виде: 111111..111111=111111+111111000000+111111000000000000…

{2010 единиц} {всего 335 слагаемых}

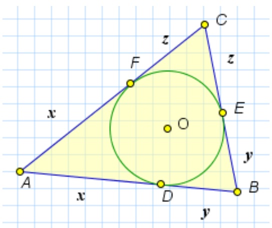
Число $111111 = 1001 \cdot 111 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 37$. Из этих пяти простых делителей можно составить $2^5 - 1$ различных делителей (количество различных подмножеств из этих чисел без пустого множества). Итак, мы получили по крайней мере 32-1=31 множитель.

(10.4) Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четвёрку. Каждые две команды встречаются один раз, за выигрыш даётся 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш 0 очков. Какое наименьшее количество очков гарантирует выход в финальную четвёрку.

Так как каждая команда встретится с семью противниками и в каждой встрече играют две команды, то количество встреч $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. В группе лидеров и выбывших из игры по 4 команды. Если три команды из группы выбывших не набрали ни одного очка, то все 56 очков распределятся между пятью командами. Пусть x-количество, которое набрала команда с меньшим количеством очков из группы лидеров, а команда из группы выбывших, набравшая большее количество очков x-1 очко(на одно меньше), (x+a),(x+b),(x+c) – количество очков, набравшие три лидирующие команды. Составим уравнение: $(x + a) + (x + b) + (x + c) + x + (x - 1) = 56$. Выразим x: $x = 11 + \frac{2 - a - b - c}{5}$. Это уравнение имеет решение при условии (a+b+c)=2. Таким образом число очков гарантирующее попадание в группу лидеров – 11.

(10.5 смотри 8.4)

(11.1) Докажите, что если *a,b,c* – длины сторон треугольника, то выполняется неравенство $a^2(2b + 2c - a) + b^2(2c + 2a - b) + c^2(2a + 2b - c) \geq 9abc$



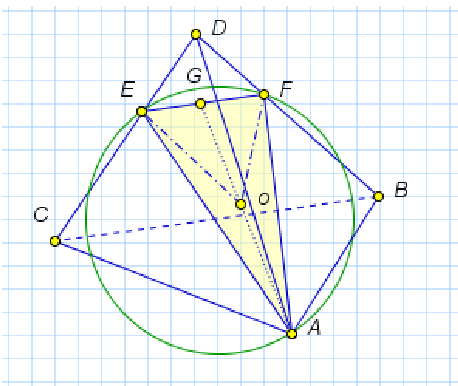
Пусть a,b,c –стороны треугольника ABC. Впишем в этот треугольник окружность. Отрезки касательных углов треугольника обозначим x,y,z.Тогда AB=a=x+y, BC=b=y+z, AC=c=x+z.Перепишем исходное выражение $\mathrm{a}^2(2\mathrm{b} + 2\mathrm{c} - \mathrm{a}) + \mathrm{b}^2(2\mathrm{c} + 2\mathrm{a} - \mathrm{b}) + \mathrm{c}^2(2\mathrm{a} + 2\mathrm{b} - \mathrm{c})$в виде: $(x + y)^2(3x + 3y + 8z) + (y + z)^2(3z + 3y + 8x) + (z + x)^2(3x + 3z + 8y)$. Применим неравенство Коши получим, что$(x + y)^2(3x + 3y + 8z) + (y + z)^2(3z + 3y + 8x) + (z + x)^2(3x + 3z + 8y) \geq$
$3\sqrt[3]{(x + y)^2(z + y)^2(x + z)^2(3x + 3y + 8z)(3z + 3y + 8x)(3x + 3z + 8y)}$

Сравним получившееся выражение с 9abc: $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(3a+8z)(3b+8x)(3c+8y)} \vee 9abc$; $(3a+8z)(3b+8x)(3c+8y) \vee 27abc$; $\left(a+\frac{8z}{3}\right)\left(b+\frac{8x}{3}\right)\left(c+\frac{8y}{3}\right) > abc$. Следовательно $a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c) \geq 9abc$.

(11.2) Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов(коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трёхчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трёхчлен с целыми корнями?

Для каждого значения коэффициента $b \in [10; 20]$ найдётся коэффициент c=b-1, при котором уравнение имеет целые корни. По условию задачи разность b-c после каждой операции изменяется на единицу. Для того, чтобы знак выражения a-b поменялся с положительного на отрицательный его значение должно обязательно пройти значения 0 и 1. Когда b-c=1 квадратный трёхчлен имеет целые корни x=b-1 и x=1.

(11.3) Можно ли жёсткий правильный тетраэдр с ребром 1 протащить сквозь обруч диаметром 0,95? Диаметром 0,9?



Если мы будем протаскивать тетраэдр сквозь обруч расположенный перпендикулярно его высоте, то он упрётся об обруч в трёх точках, если диаметр обруча меньше чем диаметр окружности описанной вокруг основания тетраэдра. Такой диаметр равен $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$. Теперь будем поворачивать тетраэдр так, чтобы одна из точек касания совпала с вершиной тетраэдра. Если это возможно, то тетраэдр можно протащить сквозь обруч. Пусть точки касания- A,E,F. Обозначим отрезок DE=DF за x. Найдём зависимость радиуса описанной окружности вокруг треугольника AEF от значения x.Из треугольника AED по теореме косинусов найдём $AE = \sqrt{x^2-x+1}$. Из треугольника AEG по теореме Пифагора найдём высоту $AG = \sqrt{\frac{3}{4}x^2-x+1}$ тогда $cos\angle AEG = \frac{AG}{AE} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$. По теореме синусов

$\frac{AF}{cos\angle AEF} = 2R = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2-x+1}}$. Подставив в это выражение x=0,5 получим $2R \approx 0{,}905$. Подставив x=0,4 получим $2R \approx 0{,}896$.

(11.4) Рассеянный математик, забыв трёхзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Может ли математик гарантированно уложиться в 16 мин 42 секунды, если помнит, что все цифры кода различны?

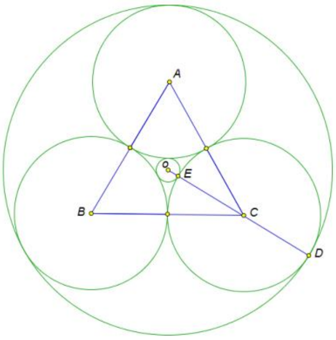
Математику необходимо перебрать все размещения без повторений из 10 элементов по трём позициям, потратив на каждое размещение по 3 секунды. Всего таких размещений $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Потраченное время $720 \cdot 3 = 2160$ сек - это 36 минут.

(11.5 смотри 9.1)

Олимпиада 2011 год

(8.1) Три данные окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Найдите отношение радиусов двух окружностей, каждая из которых касается трёх данных.

Решение:



Пусть радиусы трёх данных окружностей - r. Тогда радиус большей окружности $OD = OC + CD = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$; Радиус меньшей окружности $OE = OC - CE = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r$; $\frac{OD}{OE} = \frac{\frac{2r}{\sqrt{3}}+r}{\frac{2r}{\sqrt{3}}-r} = 7 + 4\sqrt{3}$.

(8.2) Докажите, что дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима для всех целых n.

Решение:

$\text{НОД}(14n + 3; 21n + 4) = \text{НОД}(14n + 3; 7n + 1) = \text{НОД}(7n + 1; 7n + 2) = 1 \Rightarrow$дробь несократима.

(8.3) Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из n-1 цветов так, чтобы от каждого блока отходило n-1 проводов разного цвета, если n=6. (смотри 11.4)

(8.4) Фарфор состоит из глины, гипса и песка в весовом отношении 12,5:0,5:1. Сколько килограммов фарфора будет изготовлено, если глины израсходовано на 230 кг больше, чем песка?

Решение:

Пусть a- количество глины, b –количество гипса, c-количество песка

$\begin{cases} a = c + 230 \\ \frac{a}{c} = \frac{25}{2} \\ b = \frac{c}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} a = 250 \\ b = 10 \\ c = 20 \end{cases}$ Всего фарфора 280 кг.

(8.5) Маугли попросил своих друзей принести ему орехов. Обезьяны собрали орехов поровну и принесли Маугли. По дороге они поссорились и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось только 33 ореха. По сколько орехов собрали обезьяны, если каждая из них принесла больше одного ореха? (смотри 9.6)

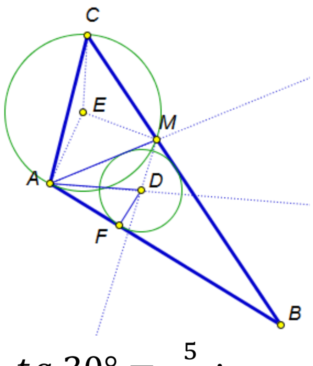
(9.1) Натуральные числа x и y таковы, что сумма дробей $\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}$ – целое число. Докажите, что каждая из этих дробей – целое число.

Решение:

$\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2(x-1)+(y+1)^2(y-1)}{(y+1)(x+1)}$; $(y+1)^2(y-1) \vdots (y+1) \Rightarrow$ $(x+1)^2(x-1) \vdots (y+1) \Rightarrow x^2-1 \vdots y+1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{y+1}$ – целое. Аналогично $\frac{y^2-1}{x+1}$ – целое.

(9.2) В треугольнике ABC, в котором сторона AC =3, AB=5, BC=7, проведена биссектриса AM. Вокруг треугольника ACM описана окружность, а в треугольник ABM вписана окружность. Найдите произведение их диаметров.

Решение:



$\cos\angle BAC=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{9+25-47}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$; $\angle BAC=120°$

$2R=2AE=\frac{CM}{\sin\angle MAC}=\frac{\frac{3}{8}BC}{\sin 60°}=\frac{21}{4\sqrt{3}}$;

$AM=\sqrt{AC\cdot AB-CM\cdot BM}=\sqrt{3\cdot5-\frac{3}{8}\cdot7\cdot\frac{5}{8}\cdot7}=\frac{15}{8}$;

$AF=\frac{AB+AM-BM}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(5+\frac{15}{8}-\frac{35}{8}\right)=\frac{5}{4}$; $r=AF\cdot tg\,\angle DAF=\frac{5}{4}\cdot tg\,30°=\frac{5}{4\sqrt{3}}$;

$2R\cdot 2r=\frac{21}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{10}{4\sqrt{3}}=\frac{15}{8}$.

(9.3) Решите уравнение $4x^2+12x+12x^{-1}+4x^{-2}=47$

Решение:

$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0$; Пусть $z=x+\frac{1}{x}$; $4z^2-8+12z-47$;

$4z^2+12z-55=0$; $\left[\begin{array}{l} z=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{11}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ 2x^2+11x+2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{-11+\sqrt{105}}{4} \\ x=\frac{-11-\sqrt{105}}{4} \end{array}\right.$.

(9.4) Найдите остаток от деления числа $222^{555}-555^{222}$ на 7. (смотри 11.6)

(9.5) Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} (x+y+z)^2=0 \\ \frac{xy+xz+yz}{xyz}=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+y+z)^2=0 \\ \frac{(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2}{2xyz}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y+z)^2=0 \\ \frac{-x^2-y^2-z^2}{2xyz}=0 \text{ – не имеет решений} \end{cases}$.

(9.6) Маугли попросил своих друзей принести ему орехов. Обезьяны собрали орехов поровну и принесли Маугли. По дороге они поссорились и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось только 33 ореха. По сколько орехов собрали обезьяны, если каждая из них принесла больше одного ореха?

Решение:

Пусть n –количество обезьян, x – количество орехов, собранное одной обезьяной.

$$n \cdot x - n \cdot (n-1) = 33; n \cdot (x - n + 1) = 33; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 3 \\ x - n + 1 = 11 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 11 \\ x - n + 1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 33 \\ x - n + 1 = 1 \end{cases} \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} x = 13 \\ x = 33 \end{array}\right.$$

(10.1) Пусть x,y,z – длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right| < 1$$

Решение:

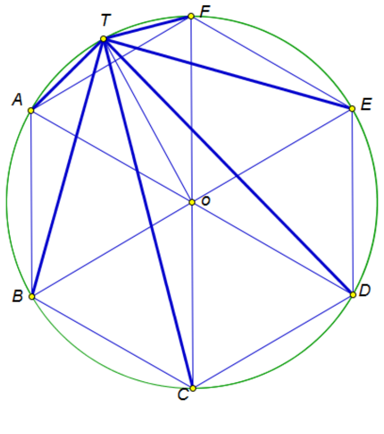
Не теряя общности, будем считать, что $x \geq y \geq z$. Тогда $\frac{z-x}{z+x} \leq 0$. Сравним $\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z}$ с единицей.

$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} \vee 1; \frac{2y(x-z)}{(x+y)(y+z)} \vee 1;$

$$\begin{cases} \frac{2y}{(x+y)} \leq 1 \\ \frac{(x-z)}{(y+z)} \vee 1; (x-z) \vee (y+z); x < y + 2z \Rightarrow \frac{(x-z)}{(y+z)} < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2y(x-z)}{(x+y)(y+z)} < 1 \Rightarrow$$

$\left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right| < 1.$

(10.2) Около правильного шестиугольника со стороной 2 описана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до всех вершин данного шестиугольника.



Решение:

$$\begin{cases} \overrightarrow{TA}^2 = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{TB}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{TC}^2 = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{TD}^2 = \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{TE}^2 = \left(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{TF}^2 = \left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT}\right)^2 = \overrightarrow{OF}^2 + \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OT} \end{cases};$$

$\overrightarrow{TA}^2 + \overrightarrow{TB}^2 + \overrightarrow{TC}^2 + \overrightarrow{TD}^2 + \overrightarrow{TE}^2 + \overrightarrow{TF}^2 = 6 \cdot \overrightarrow{OA}^2 + 6 \cdot \overrightarrow{OT}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OT} \cdot$ $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = 12 \cdot R^2 = 48.$

(10.3) Докажите, что если α+β+γ=0, то
$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

Решение:

$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \vee \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta);$

$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \vee 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

$2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \vee \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2};$ $2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$

(10.4) Решите уравнение $6 - 4x - x^2 = \frac{5}{\left|sin\frac{y}{x}cos\frac{y}{x}\right|}$

Решение:

$6 - 4x - x^2 = \frac{10}{\left|sin\frac{2y}{x}\right|};$ $\begin{cases} MAX(6 - 4x - x^2) = 10 - \text{при } x = -2 \\ MIN\left(\frac{10}{\left|sin\frac{2y}{x}\right|}\right) = 10 - \text{ при } sin\frac{2y}{x} = \pm 1 \end{cases};$ $\begin{cases} x = -2 \\ \sin y = \pm 1 \end{cases};$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, k \in Z \end{cases}$$

(10.5) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + yz = 8 \\ yz + zx = 9 \\ zx + xy = 5 \end{cases}$

Решение:

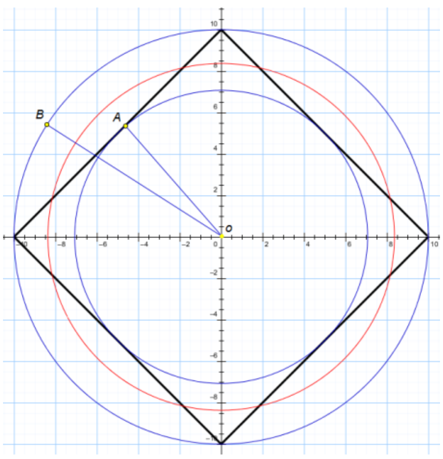
$$\begin{cases} xy+yz=8\ (1)\\ yz+zx=9\ (2);\\ zx+xy=5(3)\end{cases}\begin{cases} zx-xy=1\ (2)-(1)\\ \quad yz+zx=9\\ \quad zx+xy=5\end{cases};\begin{cases} zx=3\\ yz=6;\\ xy=2\end{cases}\begin{cases} x=\frac{3}{z}\\ y=\frac{6}{z};\\ xy=2\end{cases}\begin{cases} z^2=9\\ x=\frac{3}{z};\\ y=\frac{6}{z}\end{cases}$$

$$(x,y,z)\in\left\{\begin{matrix}(1,2,3)\\((-1,-2,-3))\end{matrix}\right\}$$

(10.6) Найдите длину интервала значений параметра a, при которых система

$\begin{cases} x^2+y^2=a\\ |y|+|x|=10\end{cases}$ имеет наибольшее число решений.

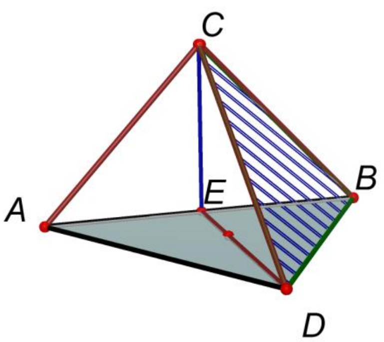
Решение:



Решение графическое. Наибольшее количество решений – 8 при условии, что $a\in(OA^2;OB^2)$; $a\in\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2;10^2\right)$; $a\in(50;100)$

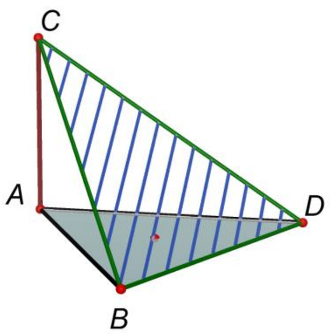
(11.1) Какой наибольший объём имеет тетраэдр, у которого 5 рёбер не превосходят 1? 4 ребра не превосходят 1?

Решение:



Пусть у тетраэдра пять единичных рёбер, тогда у него по крайней мере две соседние грани – правильные треугольники. Наибольший объём будет, если эти грани перпендикулярны друг другу.

В этом случае наибольший объём: $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot CE=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$

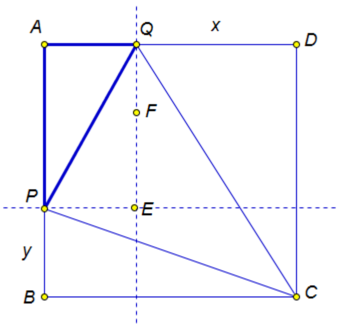


Пусть у тетраэдра четыре единичных рёбра, тогда у него по крайней мере одна грань –правильный треугольник и одно единичное ребро. Наибольший объём будет, если единичное боковое ребро перпендикулярно грани - правильному треугольнику.

В этом случае наибольший объём: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot CA = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$

(11.2) Длина стороны квадрата равна 1. На сторонах ABи AD выбраны соответственно точки Pи Q, причём так, что периметр треугольника APQравен 2. Найдите угол PCQ.

Решение:



Пусть BP=y; QD=x. Тогда из треугольника CPQ по теореме косинусов: $\cos\angle PCQ = \frac{CP^2+CQ^2-PQ^2}{2\cdot CP\cdot CQ} = \frac{1+x^2+1+y^2-(1-x)^2-(1-y)^2}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$ (*)

$$PQ + AP + A = 2;$$

$$\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2} + 1 - x + 1 - y = 2;$$

$(1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2; y = \frac{1-x}{1+x}$. Подставив в (*), получим:

$\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\angle PCQ \Rightarrow \angle PCQ = 45°$.

(11.3) Решите уравнения $\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$

Пусть $a = \sqrt{x-2} > 0; b = \sqrt{y-1} > 0$. Тогда преобразуем уравнение $\frac{36}{a} + \frac{4}{b} = 28 - 4a - b$ в виде:

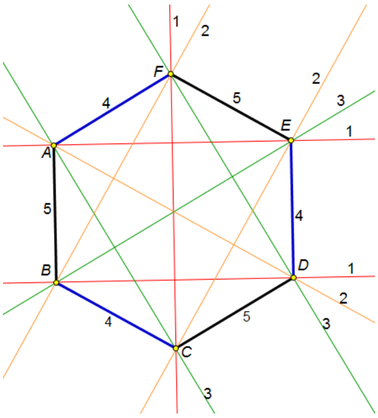
$\frac{4}{b} + b = 28 - 4a - \frac{36}{a}$. Исследуем функции $f(b) = \frac{4}{b} + b$ и $g(a) = 28 - 4a - \frac{36}{a}$.

$f'(b) = \frac{b^2-4}{b^2}$; b=2 – Точка минимума. $g'(a) = \frac{36-4a^2}{a^2}$; a=3 – точка максимума. Получили, что $MIN\big(f(b)\big) = MAX\big(g(a)\big) = g(3) = f(2) = 4$.

Таким образом, решения будут только при условии: $\begin{cases}\sqrt{x-2} = 3 \\ \sqrt{y-1} = 2\end{cases}$; $\begin{cases}x = 11 \\ y = 5\end{cases}$.

(11.4) Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из n-1 цветов так, чтобы от каждого блока отходило n-1 проводов разного цвета, если n=6, если n =13?

Решение:



При n=6 всего проводов $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. При этом проводов одного цвета $\frac{15}{5} = 3$. Провода по цветам можно распределит так:

При n=13 всего проводов $\frac{13\cdot 12}{2} = 78$. При этом проводов одного цвета $\frac{78}{12} = \frac{13}{2}$ – не может быть.

(11.5) При каком значении параметров a и b система $\begin{cases}a^2x - by = a^2 + 2b \\ 4bx - b^2y = 4 - 3b\end{cases}$ имеет бесконечное количество решений?

Решение:

Бесконечно много решений будет, если прямые $\begin{cases}y = \frac{a^2}{b}x - \frac{a^2+2b}{b} \\ y = \frac{4}{b}x + \frac{3b-4}{b^2}\end{cases}$ совпадают.

То есть $\begin{cases}\frac{a^2}{b} = \frac{4}{b} \\ \frac{a^2+2b}{b} = \frac{4-3b}{b^2}\end{cases}$; $\begin{cases}a^2 = 4 \\ a^2b + 2b^2 = 4 - 3b\end{cases}$; $\begin{cases}a^2 = 4 \\ 4b + 2b^2 = 4 - 3b\end{cases}$;

$\begin{cases}a^2 = 4 \\ 2b^2 + 7b - 4 = 0\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} a = 2; b = -4 \\ a = 2; b = -0{,}5 \\ a = -2; b = -4 \\ a = -2; b = -0{,}5\end{array}\right.$.

(11.6) Найдите остаток от деления числа $222^{555} - 555^{222}$ на 7.

Решение:

$222^{555} - 555^{222} \equiv 5^{555} - 2^{222}(mod\ 7)$; $5^{555} - 2^{222} \equiv -2^{555} - 2^{222}(mod\ 7)$.

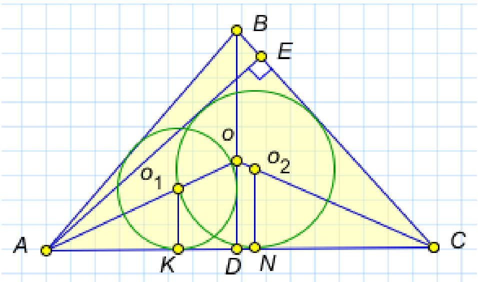
$-2^{555} - 2^{222} = -8^{185} - 8^{74}$; $-8^{185} - 8^{74} \equiv -1^{185} - 1^{74}(mod\ 7) \Rightarrow 222^{555} - 555^{222} \equiv -2(mod\ 7)$.

Остаток 7-2=5.

Олимпиада 2012 год

(9.1) BD и AE – высоты равнобедренного треугольника ABC (AB=BC). Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и AEC, равны соответственно 5 и 6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

I способ:



1) По условию задачи $O_1K = 5$; $O_2N = 6$. Найти OD.

2) Пусть $AK = x, OD = r, CN = z$

3) $\begin{cases} \triangle AOD \sim \triangle AO_1K \Rightarrow \frac{r}{5} = \frac{x+5}{x}, \\ \triangle COD \sim \triangle CO_2N \Rightarrow \frac{r}{6} = \frac{x+5}{z}. \end{cases} \Rightarrow z = \frac{6}{5}x.$

$\begin{cases} z = \frac{6}{5}x, \\ DN + z = x + 5; \end{cases} \Rightarrow DN = 5 - \frac{x}{5}.$

4) Из $\triangle$ AEC: $AC^2 = AE^2 + EC^2$; $4(x+5)^2 = (6 + AN)^2 + (z+6)^2$; $4(x+5)^2 = (6 + AC - z)^2 + (z+6)^2$; $4(x+5)^2 = (6 + 2(x+5) - \frac{6}{5}x)^2 + (\frac{6}{5}x + 6)^2 \Rightarrow x = 10$

5) Из пункта 3) получаем, что $r = 5\frac{x+5}{x} = 7.5$

II способ:

1) Пусть $AD = x, OD = r, AB = a$,кроме этого $O_1K = \frac{AD+BD-AB}{2}$

2) $\begin{cases} \triangle AOD \sim \triangle AO_1K \Rightarrow \frac{r}{5} = \frac{x}{x-5}, \\ \triangle ADB \sim \triangle CEA \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{a}{2x} \\ 5 = \frac{x+\sqrt{a^2-x^2}-a}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 7.5$

(9.2) Вычислите сумму $7 + 77 + 777 + \cdots + 77\ldots7(n - \text{семёрок})$.

$$
\begin{aligned}
(7+77+777+\cdots+777..777) &= 7(1+11+111\ldots+111..111)\\
&= 7((1+10+\cdots+10^{n-1})+(1+10+\cdots+10^{n-2})+\cdots\\
&+(1+10)+1)) = 7\left(\frac{10^n-1}{9}+\frac{10^{n-1}-1}{9}+\cdots+\frac{10^2-1}{9}+1\right)\\
&= \frac{7}{9}\cdot(10^n+10^{n-1}+\cdots+10^2-(n-1)+9)\\
&= \frac{7}{9}\cdot\left(10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n\right)
\end{aligned}
$$

(9.3) Может ли число вида 7^m+7^k быть полным квадратом?($m \neq k$; $m, k \epsilon N$). Сколько таких чисел?

Найдём остатки от деления числа вида 7^m+7^k на 3. Это число 2. На самом деле $(7^m+7^k) mod\ 3 = (1^m+1^k) mod\ 3 = 2$. Найдём все возможные остатки квадратов целых чисел при делении на 3. Это числа: 0 и 1. Таким образом, числа вида 7^m+7^k не могут быть квадратами целых чисел.

(9.4) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд билетов, не являющихся счастливыми? (Номера билетов от 000000 до 999999 включительно, билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних). Сколько раз встречается серия максимальной длины?

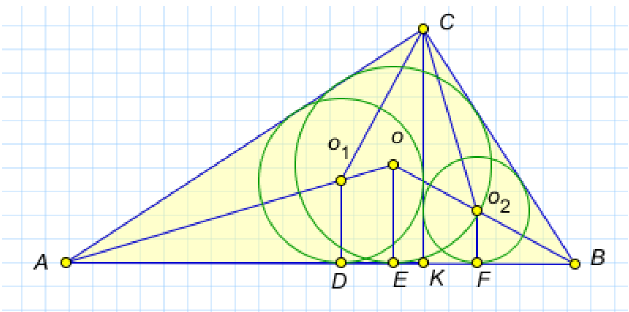
Заметим, что билет (000 000) – счастливый, а все последующие вплоть до (001 000) – не счастливые(подряд идущих несчастливых билетов 1000-0=1000). Аналогично 1000 несчастливых билетов подряд встретятся с (998999) по (999998)включительно – это 999999-998999=1000 билетов. Все остальные серии из несчастливых билетов будут меньше. Докажем это. Пусть некоторый счастливый билет имеет номер $\overline{zyx\,zyx}$ где $z > y > x > 0$. Т*огда* следующий счастливый билет $\overline{zyxz(x+1)(y-1)}$. Соответственно$\overline{zyxz(x+1)(y-1)} - \overline{zyx\,zyx} - 1 < 100$. Пусть некоторый счастливый билет имеет номер $\overline{99x\,99x}$ где $8 > x \geq 0$. Т*огда* следующий счастливый билет $\overline{99(x+1)(x+1)99}$. Соответственно $\overline{99(x+1)(x+1)99} - \overline{99x\,99x} - 1 < 1000$. Аналогично проверяются все другие варианты расположения x, y, z. Очевидно при этом длины серий подряд идущих несчастливых билетов будут меньше 1000. Итак, наибольшая длина серии из несчастливых билетов -1000. Всего таких серий – две.

(9.5) Спортсмен, стартуя с одного конца бассейна, доплывает до другого конца бассейна, поворачивает и плывёт обратно. В тот момент, когда он поворачивает, по соседней дорожке навстречу ему выплывает другой спортсмен, который проплывает расстояние от одного до другого конца бассейна за 40 секунд. Первый спортсмен вернулся к месту своего старта через 16 секунд после того, как поравнялся со спортсменом, плывшим ему навстречу. Предполагая, что скорость спортсменов всё время была постоянной, определите через сколько минут после начала своего заплыва первый спортсмен вернулся к месту старта.

Для решения задачи воспользуемся тем, что при равномерном движении скорость обратно пропорциональна времени. Пусть v_1 – скорость первого спортсмена, v_1- второго, t – искомое время. Второй пловец проплывает бассейн за 40 секунд, первый - за $\frac{t}{2}$ секунд. Вдвоём они проплывают расстояние равное длине бассейна за $\frac{t}{2} - 16$ секунд. Составим систему уравнений. $\begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = \frac{40}{\frac{t}{2}} \\ \frac{v_1+v_2}{v_2} = \frac{40}{\frac{t}{2}-16} \end{cases}$. Решая систему относительно t и $\frac{v_1}{v_2}$ получим, что $t \approx 69$ с. В минутах $t \approx 1.15$ мин.

(10.1) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CK. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACK и BCK, равны соответственно r, r_1, r_2. Найдите длину высоты CK.

I способ:



1) По условию задачи $O_1D = r_1$; $O_2F = r_2$; $OE = r$.

2) $CK = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{AC \cdot CB}{\sqrt{AC^2+BC^2}}$. $r = \frac{AC+BC-AB}{2}$

3) $\triangle ACB \sim \triangle AKC \sim \triangle CKB \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{AC}{CB} = \frac{r_1}{r_2}, \\ \frac{AC}{AB} = \frac{r_1}{r}, \\ AC + CB - AB = 2r; \end{cases} \quad \begin{cases} AC = \frac{2rr_1}{r_1+r_2-r}, \\ CB = \frac{2rr_2}{r_1+r_2-r}, \\ AB = \frac{2r^2}{r_1+r_2-r}. \end{cases}$$

4) $CK = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2 - r}$.

II способ:

$$\begin{cases} 2r = AC + BC - AB \\ 2r_1 = AK + CK - AC \\ 2r_2 = BK + CK - CB \end{cases} \Rightarrow 2(r + r_1 + r_2) = AK + BK + 2CK - AB$$

$$= AB + 2CK - AB = 2CK \Rightarrow CK = r + r_1 + r_2$$

(10.2) Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ определяется следующим образом. Первые два числа задаются, а каждое последующее есть среднее арифметическое двух предыдущих. Найдите выражение a_n, если $a_1 = a, a_2 = b$.

По условию задачи $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$. Соответственно $a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{2}$ или $a_n - a_{n-1} = (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$. Тогда разности $(a_n - a_{n-1}); (a_{n-1} - a_{n-2}); (a_{n-2} - a_{n-3}); \dots ; (a_2 - a_1)$ - члены геометрической прогрессии b_n с множителем $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Кроме этого $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$. То есть a_n- это сумма первого члена исходной последовательности и суммы n-1 –членов геометрической прогрессии b_n. Итак, $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = a + (b - a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

(10.3) Докажите, что среди чисел вида $2^m + 2^k$ бесконечное количество полных квадратов целого числа, а среди чисел вида $5^m + 5^k$ нет ни одного квадрата целого числа. ($m \neq k;\ m, k \epsilon N$)

Пусть m>k, тогда $2^m + 2^k = 2^k \cdot (2^{m-k} + 1)$. Если k-чётное(k=2t) и m-k=3 (m=2t+3) , то $2^m + 2^k = 2^{2t} \cdot (2^3 + 1) = (2^t \cdot 3)^2$- полный квадрат. Таких чисел бесконечно много.

Заметим, что число вида $5^m + 5^k$ делится на 2. На самом деле $(5^m + 5^k) mod\ 2 = (1^m + 1^k) mod\ 2 = 0$. Если $5^m + 5^k$ – квадрат целого числа, то делится на 4. Проверим это:

$(5^m + 5^k) mod\, 4 = (1^m + 1^k) mod\, 4 = 2$. То есть число $5^m + 5^k$ не делится на 4. Таким образом, число вида $5^m + 5^k$ не может быть полным квадратом целого числа.

(10.4) Сколько всего счастливых билетов, сумма первых трёх цифр которых не превышает шести? (Номера билетов от 000000 до 999999 включительно, билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних).

I способ:

Составим все возможные суммы трёх цифр не больших шести и для каждой из них посчитаем количество различных трёхзначных чисел.

Сумма	Варианты чисел	Количество чисел	Кол-во билетов (декартово произведение)
0	(000) -	1	1
1	(001) -и перестановки	3	$3^2 = 9$
2	(011) и перестановки, (002) и перестановки	3+3=6	$6^2 = 36$
3	(111), (210) и перестановки, (003) и перестановки	1+6+3=10	$10^2 = 100$
4	(112)и перестановки, (130) и перестановки,(004) и перестановки, (220) и перестановки	3+6+3+3=15	$15^2 = 225$
5	(113)и перестановки, (230) и перестановки,(014) и перестановки, (221) и перестановки, (005) и перестановки	3+6+6+3+3=21	$21^2 = 441$
6	(114)и перестановки, (231) и перестановки,(024) и перестановки, (222) и перестановки, (006) и перестановки,(033) и перестановки, (015) и перестановки	3+6+6+1+3+3+6=28	$28^2 = 784$

Итого всего таких счастливых билетов: 784+441+225+100+36+9+1=1596

II способ:

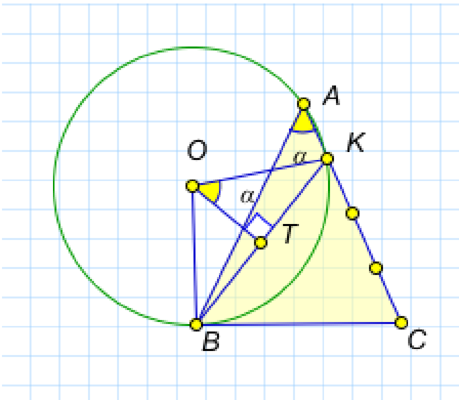
Посчитаем количество различных трёхзначных чисел, для каждой возможной суммы цифр $s \in [0;6]$. Если в качестве первой цифры выбрать 0, то в качестве второй можно выбрать цифры от 0 до s (s+1) –штук(третья цифра предопределена суммой). Если в качестве первой цифры выбрать 1, то в качестве второй можно выбрать цифры от 0 до s-1 (s) –штук. Если в качестве первой цифры выбрать 2, то в качестве второй можно выбрать цифры от 0 до s-2 (s-1) –штук. И так далее до первой цифры s, в этом случая вторая цифра – 0 (один вариант). Итак, всего вариантов для суммы s : $(s+1)+s+(s-1)+\dots+1=\frac{(s+1)+1}{2}\cdot(s+1)=\frac{(s+1)(s+2)}{2}$. Итак каждой суммы от 0 до 6 получим варианты трёхзначных чисел:

S	0	1	2	3	4	5	6
вариантов	1	3	6	10	15	21	28

Всего же вариантов счастливых билетов $1+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2=1596$.

(10.5 Смотри 9.5)

(11.1)Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает AC в точке K. Найдите длину боковой стороны, если KC=3AK.



1) Пусть $AK=x; KC=3x$. $\angle BAC=\alpha$. По свойству секущей и касательной $CK\cdot CA=BC^2; 3x\cdot 4x=BC^2 \Rightarrow BC=2\sqrt{3}x$

2) Из $\Delta\, BAC$ по теореме косинусов:

$$\cos\alpha=\frac{16x^2+16x^2-12x^2}{2\cdot 16x^2}=\frac{5}{8}$$

3) Из $\Delta\, BAK$ по теореме косинусов :

$$BK=\sqrt{16x^2+x^2-2\cdot 4x^2\cdot\frac{5}{8}}=2\sqrt{3}x$$

4) $2\cdot\angle BAK=\angle BOK$ (центральный) $\Longrightarrow \angle TOK=\alpha$.

5) $BK = 2TK = 2OK \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{64}}$; $2\sqrt{3}x = 2R\frac{\sqrt{39}}{8}$; $x = R\frac{\sqrt{13}}{8}$;

6) $AC = 4x = R\frac{\sqrt{13}}{2}$.

(11.2) Решите уравнение $x^3 + 7x^2 + 14x + a = 0$, зная, что оно имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Пусть α – один из корней данного кубического уравнения, тогда это уравнение можно записать в виде $(x-\alpha)\cdot(x-\alpha q)\cdot(x-\alpha q^2) = 0$. Раскрыв скобки, получим уравнение $x^3 - (\alpha q^2 + \alpha q + \alpha)x^2 + (\alpha^2 q^3 + \alpha^2 q^2 + \alpha^2 q)x - \alpha^3 q^3 = 0$. Сравнив коэффициенты кубических уравнений, получим систему $\begin{cases} \alpha(q^2+q+1) = -7, \\ \alpha^2 q(q^2+q+1) = 14, \\ \alpha^3 q^3 = -a. \end{cases}$ Откуда получим, что $\alpha q = 2$ и соответственно $a = 8$. Остаётся решить уравнение $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$. Заметим корень x=-1. Тогда уравнение $(x+1)(x^2+6x+8) = 0$ имеет корни -1;-4;-2.

(11.3) Докажите, что многочлен x^2 можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией. Докажите, что любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.

Будем искать многочлены, разность которых даёт x^2 в виде $y = x^3 + ax^2 + bx$. Для того, чтобы многочлен возрастал, его производная должна быть положительна при любом x. То есть $y' = 3x^2 + 2ax + b > 0$ при любом x, если $\frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0 \Rightarrow b < \frac{a^2}{3}$. Тогда возьмём первый многочлен $y_1 = x^3 + ax^2 + \left(\frac{a^2}{3} - 1\right)x$, а второй $y_2 = x^3 + (a-1)x^2 + \left(\frac{(a-1)^2}{3} - 1\right)x$. Для того, чтобы выполнялось условие задачи $y_1 - y_2 = x^2$ необходимо, чтобы $\left(\frac{a^2}{3} - 1\right) = \left(\frac{(a-1)^2}{3} - 1\right)$. Это выполняется, если $a = \frac{1}{2}$. Тогда условию задачи удовлетворяют многочлены $y_1 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{12}x$, $y_2 = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{12}x$.

Докажем, что любой многочлен можно представить в виде разности двух возрастающих многочленов. Для доказательства этого воспользуемся истинным утверждением о том, что сумма возрастающих функций – функция возрастающая. Тогда для решения задачи достаточно доказать, что любой член произвольного многочлена можно представить в виде разности двух возрастающих многочленов. Для этого достаточно доказать, что одночлены x^{2n} и x^{2n+1} можно представить в виде разности двух возрастающих многочленов. Итак, многочлен x^{2n+1} – возрастающий и $x^{2n+1} = (2x^{2n+1}) - x^{2n+1}$. Будем искать многочлены, разность которых даёт x^{2n} в виде $y = x^{2n+1} + ax^{2n} + bx^{2n-1}$. Для того, чтобы многочлен возрастал, его производная должна быть положительна при любом x. То есть $y' = (2n+1)x^{2n} + (2n)ax^{2n-1} + (2n-1)bx^{2n-2} = x^{2n-2} \cdot \left((2n+1)x^2 + (2n)ax + (2n-1)b\right) > 0$ при любом x, если $\frac{D}{4} = a^2n^2 - (2n+1)(2n-1)b > 0 \Rightarrow b < \frac{a^2n^2}{4n^2-1}$. Тогда возьмём первый многочлен $y_1 = x^{2n+1} + ax^{2n} + \left(\frac{a^2n^2}{4n^2-1} - 1\right)x^{2n-1}$,а второй $y_2 = x^{2n+1} + (a-1)x^{2n} + \left(\frac{(a-1)^2n^2}{4n^2-1} - 1\right)x^{2n-1}$. Для того, чтобы выполнялось условие задачи $y_1 - y_2 = x^{2n}$, необходимо чтобы $\left(\frac{a^2n^2}{4n^2-1} - 1\right) = \left(\frac{(a-1)^2n^2}{4n^2-1} - 1\right)$. Это выполняется, если $a = \frac{1}{2}$. Итак, любой многочлен можно представить в виде разности двух возрастающих многочленов.

(11.4) Сколько всего счастливых билетов, сумма первых трёх цифр которых больше двадцати? (Номера билетов от 000000 до 999999 включительно, билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних).

Составим все возможные суммы трёх цифр больших 20 и для каждой из них посчитаем количество различных трёхзначных чисел.

Сумма	Варианты чисел	Количество чисел	Кол-во билетов (декартово произведение)
21	(777) ,(678) и перестановки, (669) и перестановки, (795) и перестановки, (885) и перестановки,(894) и	1+6+3+6+3+6+3=28	$28^2 = 784$

	перестановки, (993) и перестановки		
22	(589) и перестановки, (688) и перестановки,(679) и перестановки, (778) и перестановки, (994) и перестановки	6+3+6+3+3=21	$21^2 = 441$
23	(599) и перестановки, (689) и перестановки,(797) и перестановки,(788) и перестановки.	3+6+3+3=15	$15^2 = 225$
24	(699) и перестановки, (789) и перестановки, (888) и перестановки	3+6+1=10	$10^2 = 100$
25	(799) и перестановки, (889) и перестановки	3+3=6	$6^2 = 36$
26	(899) и перестановки	3	$3^2 = 9$
27	(999)	1	1

Итого всего таких счастливых билетов: 784+441+225+100+36+9+1=1596

(11.5 Смотри 9.5)

Олимпиада 2013 год

(9.1) Решите уравнение в целых числах. $\frac{x \cdot y}{x+y} = 11.$

Выразим одну переменную через другую $x = 11 + \frac{121}{y-11}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{c} y-11=1 \\ y-11=-1 \\ y-11=11 \\ y-11=-11 \\ y-11=121 \\ y-11=-121 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} y=12 \\ y=10 \\ y=22 \\ y=0 \\ y=132 \\ y=-110 \end{array}\right..$$

Соответственно получаем пары чисел:

(132;12); (-110;10); (22;22); (12;132); (10;-110).

(9.2) На плоскости даны 11 точек. Можно ли провести 12 концентрических окружностей так, чтобы между двумя любыми соседними окружностями лежала ровно одна из данных точек?

Для этого центр окружностей должен быть удалён на разные расстояния от данных точек. ГМТ удалённых на одинаковое расстояние от двух данных точек(концов отрезка) – прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно ему. Поэтому любая точка не находящаяся ни на одном серединном перпендикуляре 55 отрезков, составленных из данных точек, может быть центром таких концентрических окружностей. Для этого отсортируем точки по удалённости от выбранного центра. Соответственно первая окружность – малого радиуса вокруг центра, вторая – с радиусом заключённым между расстояниями от центра до первой и второй точек и так далее.

(9.3) Дан угол в 11^0. С помощью циркуля и линейки разделите его на 11 равных частей.

Для решения этой задачи необходимо уметь с помощью циркуля и линейки делить угол пополам и отмерять уже данный угол. В этом случае, возможно например такое решение:

Пусть данный угол $\angle AOB = 11°$.

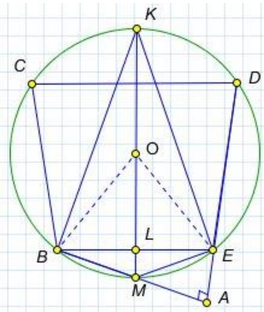
1) Построим равносторонний треугольник СОВ.
2) Разделим угол СОВ пополам, получим $\angle DOB = 30°$

3) Разделим угол DOB пополам, получим $\angle EOB = 15°$,

4) $\angle EOA = 4°$, деля его пополам, а затем получившиеся углы ещё пополам, получим четыре угла по 1°.

5) Отмеряя по 1° десять раз, разделим угол AOB на одиннадцать частей.

(9.4) Вершины B,C и D четырёхугольника ABCD расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD – в точке E. Известно, что угол BAD- прямой, длина хорды ME равна длине хорды BM и длины хорд BC,CD и ED равны между собой. Найдите величину угла ABO.



Сумма внутренних углов пятиугольника BCDEM равна $(n-2)\pi = 3\pi$. $\angle BCD + \angle BED = \pi \Rightarrow \angle BCD = \angle BEA$; $\Delta BKM \sim \Delta ABE \sim \Delta LBM$(треугольники с соответственно перпендикулярными сторонами). Тогда $\angle BMK = \angle BEA$; Так как треугольник BOM – равнобедренный, то $\angle OBM = \angle OMB$. Пусть $\angle BCD = \angle CDE = \beta$. Тогда $\angle BCD + \angle CDE + \angle DEO + \angle OEM + \angle EMB + \angle MBO + \angle OBC = 3\pi$ можно переписать в виде: $\beta + \beta + \frac{\beta}{2} + \beta + 2\beta + \beta + \frac{\beta}{2} = 3\pi$; $\beta = \frac{3}{7}\pi = \angle ABO$.

(10.1) Докажите, что если сумма 11 натуральных чисел делится на 30, то и сумма пятых степеней этих чисел тоже делится на 30.

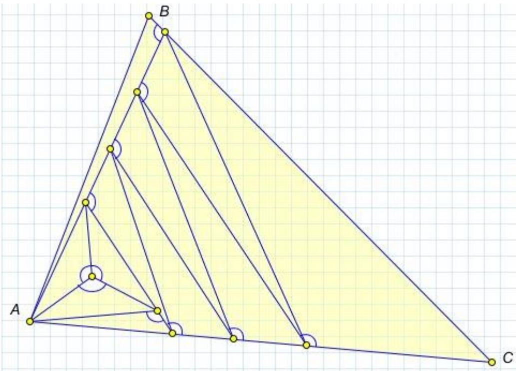
Для того, чтобы сумма 11 чисел была чётной необходимо, чтобы среди них было чётное количество нечётных чисел. При возведении в натуральную степень число не меняет свойства чётности. Поэтому сумма пятых степеней – чётна. Обозначим эти числа a_i , их остатки при делении на 3 - r_i. Тогда $\sum_{i=1}^{11} a_i \equiv \sum_{i=1}^{11} r_i \, (mod\ 3)$. Для того, чтобы сумма делилась на 3 необходимо, чтобы количество остатков равных единице, равнялось количеству остатков равных двум(дополнение -1). Возведение в нечётную степень не изменяет остаток при делении на 3. Поэтому сумма пятых степеней делится на 3. Возведение в пятую степень не меняет остатков числа при делении на пять (легко проверяется с помощью свойства $a^n \equiv r^n (mod\ b)$. Итак сумма пятых степеней исходных чисел делится на 2,3,5. Значит делится на 30.

(10.2) На единичной окружности отмечено 11 точек. Докажите, что на этой окружности можно найти такую точку, что сумма расстояний от неё до всех отмеченных точек была бы больше 11.

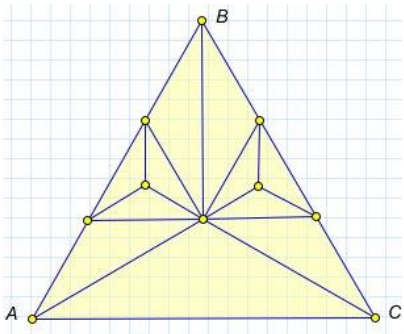
Пусть данные точки $A_1; A_2 \dots A_{11}$, центр единичной окружности – О. Найдём вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \cdots + \overrightarrow{OA_{11}}$. От точки О отложим единичный вектор $\overrightarrow{OT}$ в противоположном направлении относительно вектора $\vec{a}$. Точка Т будет удовлетворять условию задачи. На самом деле, $|\overrightarrow{TA_1}| + |\overrightarrow{TA_2}| + |\overrightarrow{TA_3}| + .. + |\overrightarrow{TA_{11}}| \geq |\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \overrightarrow{TA_3} + \cdots + \overrightarrow{TA_{11}}| = |11 \cdot \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \cdots + \overrightarrow{OA_{11}}| = |11 \cdot \overrightarrow{TO} + \vec{a}| = 11 + |\vec{a}| > 11$. ($\overrightarrow{TO} \uparrow\uparrow \vec{a}$).

(10.3) Докажите, что любой треугольник можно разделить на 11 таких треугольников, у каждого из которых один угол равен 120^0.

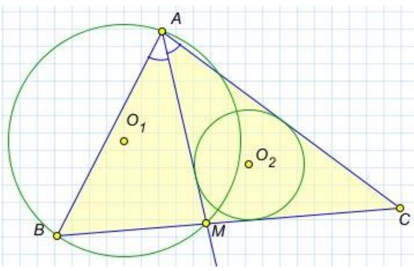
Решение выглядит следующим образом для неправильного треугольника:
Дужкой обозначены углы в 120^0.



Для правильного треугольника:



(10.4) В треугольнике ABC, в котором сторона AB=3, AC=5 и BC=7, проведена биссектриса AM. Вокруг треугольника ABM описана окружность, а в треугольник ACM вписана окружность. Найдите произведение их диаметров.



$$cos\angle BAC = \frac{BA^2+CA^2-BC^2}{2\cdot BA\cdot CA} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = 120°.$$

$$2R_1 = \frac{BM}{sin\angle BAM} = \frac{\frac{3}{8}BC}{\sin 60°} = \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

$$AM = \frac{2\cdot AB\cdot AC\cdot cos\frac{\angle BAC}{2}}{AB+AC} = \frac{15}{8}.$$

$2r_2 = \frac{4 \cdot S_{AMC}}{AM+MC+AC} = \frac{2 \cdot AM \cdot AC \cdot sin\angle MAC}{AM+MC+AC} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$. $2R_1 \cdot 2r_2 = \frac{35}{8}$.

(11.1) Пусть a, b- целые числа. Докажите, что если $a+b$ – делится на 11, то число $\frac{a^{11}+b^{11}}{a+b}$ тоже делится на 11.

$\frac{a^{11}+b^{11}}{a+b} = \frac{(a+b)(a^{10}-a^9b+a^8b^2-a^7b^3+a^6b^4-a^5b^5+a^4b^6-a^3b^7+a^2b^8-ab^9+b^{10})}{(a+b)}=$

$= (a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10})$.

Пусть r_a, r_b- *остатки при делении на 11 чисел* a *и* b.

$(a+b) \equiv r_a + r_b (mod\ 11) \Rightarrow r_a + r_b = 11 \Rightarrow r'_b = -r_a$, *где* r'_b- *дополнение остатка* r_b .

Тогда $(a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10}) \equiv ({r_a}^{10} - {r_a}^9(-r_a) + {r_a}^8(-r_a)^2 - {r_a}^7(-r_a)^3 + {r_a}^6(-r_a)^4 - {r_a}^5(-r_a)^5 + {r_a}^4(r_a)^6 - {r_a}^3(-r_a)^7 + {r_a}^2(-r_a)^8 - r_a(-r_a)^9 + (-r_a)^{10})\ mod\ 11$.

Последнее выражение преобразуется к виду $11{r_a}^{10}$. *Соответственно* $(a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10}) \vdots 11$.

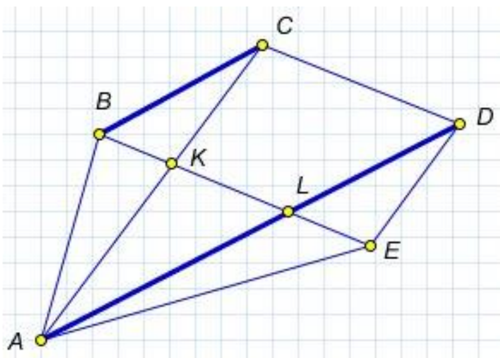
(11.2) Какие значения может принимать сумма двух действительных чисел, если их произведение равно 11.

1) Числа a и b - целые: $a \cdot b = 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11, b = 1 \\ a = -11, b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 12 \\ a + b = -12 \end{array}\right.$
2) Пусть $a = \frac{11 \cdot p}{q}$; $b = \frac{q}{p}$. Тогда $a \cdot b = 11$; $a + b = \frac{11p^2+q^2}{qp}$, где p,q- не равны нулю.
   Сделаем замену $t = \frac{p}{q}$. Рассмотрим функцию $f(t) = 11t + \frac{1}{t}$. Проведя исследование этой функции с помощью производной, получим что $\left[\begin{array}{l} f(t) \geq 2\sqrt{11} \\ f(t) \leq -2\sqrt{11} \end{array}\right.$.
3) Пусть $a = \sqrt{11} \cdot t; b = \frac{\sqrt{11}}{t}$. Тогда $a \cdot b = 11$; $a + b = \sqrt{11} \cdot t + \frac{\sqrt{11}}{t} = \sqrt{11} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right)$; Откуда $|a + b| \geq 2\sqrt{11}$(Неравенство Коши).
   Итак, $(a + b) \epsilon \left(-\infty; -2\sqrt{11}\right] \cup [2\sqrt{11}; \infty)$.

(11.3) Докажите, что в любом выпуклом одиннадцатиугольнике найдётся две такие диагонали, угол между которыми меньше 5^0.

Количество диагоналей вычисляется по формуле $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. Для одиннадцатиугольника диагоналей -44. Выберем произвольно систему координат. Через начало координат проведём прямые параллельные диагоналям. Каждой такой прямой сопоставим угол, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (от 0 до 180^0). Между 44 подряд идущими получившимися лучами при условии, что любой угол между прямыми не меньше 5^0 получается угол не меньше, чем $43\cdot 5° = 215°$. Это противоречит построению(все лучи в промежутке от 0 до 180^0). Это значит, что среди углов между диагоналями есть углы меньшие, чем 5^0.

(11.4) В выпуклом пятиугольнике ABCDE площадь каждого из треугольников ABC, BCD, CDE, DEA равна S, а площадь треугольника BAE равна $\frac{8}{3}S$. Найдите площадь пятиугольника.



$S_{BAC} = S_{BDC} \Rightarrow BC \parallel AD$; $S_{CBD} = S_{CED} \Rightarrow BE \parallel CD$;

$S_{EAD} = S_{ECD} \Rightarrow AC \parallel ED$. Пусть $AD = k \cdot BC$;

Тогда $\frac{AD}{AL} = \frac{AD}{AD-BC} = \frac{k}{k-1}$; $AL = AD \cdot \frac{k-1}{k}$.

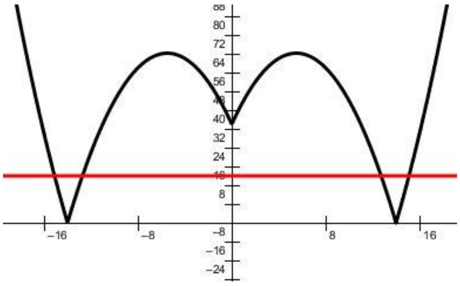
$S_{ACD} = S_{BAC} \cdot k = S \cdot k$; $S_{KAL} = S_{ACD} \cdot \left(\frac{AL}{AD}\right)^2 = S \cdot \frac{(k-1)^2}{k}$; $S_{BAK} = S_{ACB} \cdot \frac{AK}{AC} = S_{ACB} \cdot \frac{AL}{AD} = S \cdot \frac{k-1}{k}$; $\Delta BCK = \Delta LDE \Rightarrow$

$BK = LE \Rightarrow S_{BAK} = S_{LAE}$.

$$S_{BAE} = S_{BAK} + S_{KAL} + S_{LAE};\ \frac{8}{3}S = 2\frac{(k-1)}{k}S + \frac{(k-1)^2}{k}S \Rightarrow k = 5.$$

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ADE} + S_{ACD} = S + S + 5S = 7S.$$

* При всех значениях параметра a определить количество корней уравнения $|x^2 - 11|x| - 42| = -11a$.



Построим график функции $f(x) = |x^2 - 11|x| - 42|$. $g(x) = -11a$ – горизонтальная прямая.

$f(0) = 42$; $f\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{289}{4}$. Тогда

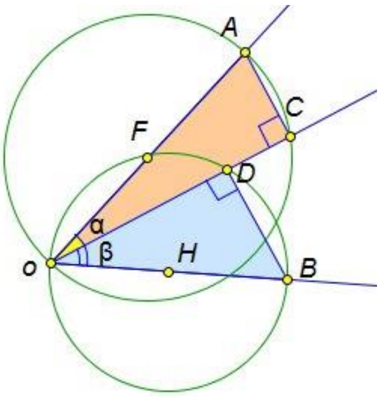
$$\begin{cases} g(x)\epsilon\left(\frac{289}{4};+\infty\right) \cup \{0\} - 2 \text{ решения} \\ g(x)\epsilon(0;42) \cup \left\{\frac{289}{4}\right\} - 4 \text{ решения} \\ g(x) = 42 - 5 \text{ решений} \\ g(x)\epsilon\left(42;\frac{289}{4}\right) - 6 \text{ решений} \\ g(x) < 0 - \text{нет решений} \end{cases} \quad \begin{cases} a\epsilon\left(-\infty;-\frac{289}{44}\right) \cup \{0\} - 2 \text{ решения} \\ a\epsilon\left(-\frac{42}{11};0\right) \cup \left\{-\frac{289}{44}\right\} - 4 \text{ решения} \\ a = -\frac{42}{11} - 5 \text{ решений} \\ a\epsilon\left(-\frac{289}{44};-\frac{42}{11}\right) - 6 \text{ решений} \\ a > 0 - \text{нет решений} \end{cases}$$

Олимпиада 2014 год

(8.1) Найдите все пары целых чисел (x;y), удовлетворяющих уравнению xy=20-3x+y.

1) $x\cdot(y+3)=20+y; x=\frac{20+y}{y+3}=1+\frac{17}{y+3} \Rightarrow y+3\in\{\pm1;\pm17\}; y\in\{-2;-4;14;-20\}$
2) Ответ: (-2;18),(-4;-16),(14;2),(-20;0)

(8.2) Дан угол AOB (A и B-точки а сторонах угла). Как построить прямую l, проходящую через вершину O так, чтобы площади треугольников AOC и BOD, где C и D – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны?

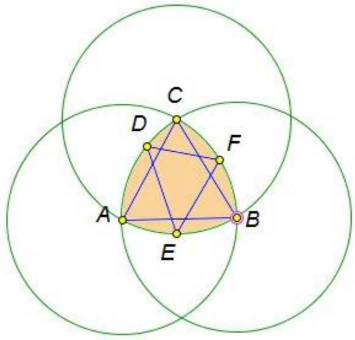


$\frac{S_{OAC}}{S_{OBD}}=\frac{OC\cdot AC}{OD\cdot BD}=1; OC\cdot AC=OD\cdot BD$

1) Проведём окружности с диаметрами OA и OB. Точки D и C- точки пересечения прямой l с этими окружностями. При выборе прямой l должно выполняться соотношение $\frac{OC}{OD}=\frac{BD}{AC}$.

(8.3) Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите, что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.

1) По условию задачи точки A,B,C находятся на расстоянии друг от друга не превышающем. Для определённости пусть ровно на 1, то есть ABC – равносторонний.
2) Тогда оставшиеся точки D,E,F не выходят за рамки фигуры, ограниченной дугами AC,CB,AB. Любые точки этой фигуры, кроме точек A,B,C находятся друг от друга на расстоянии меньшем, чем 1.



(8.4) Сколько существует целых значений параметра а, при которых уравнение $(a+5)x^2+(2a\text{-}3)x+a\text{-}10=0$ имеет два корня разных знаков?

1) При а=-5 – один корень
2) Уравнение $x^2+\frac{(2a\text{-}3)}{a+5}x+\frac{a\text{-}10}{a+5}=0$ имеет два различных по знаку корня, если $\frac{a-10}{a+5}<0$
3) $a\epsilon(\text{-}5;10)$ – всего 14 целых значений.

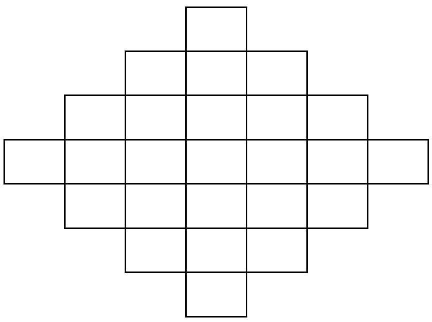
(8.5) В сосуде было 20 литров чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько литров спирта отлили в первый раз?

1) $\frac{20\text{-}x}{20}\cdot(20\text{-}x)=\frac{1}{4}\cdot 20;\ (20\text{-}x)^2=100;\ x=10$

(9.1) Дана сетка(сторона клетки –одна верёвочка) :

Сколько верёвочек максимально можно перерезать, чтобы сетка не распалась на части, если n=2015?

1
2
3
…
n



1) Для того , чтобы граф оставался связным необходимо выполнение уравнения В+Г=Р+2 (Эйлера), где Г –количество клеток +1. После максимального количества перерезаний Г=1, В –неизменно. Тогда $\begin{cases} В+Г=Р+2 \\ В+1=Р'+2 \end{cases} \Rightarrow Р\text{-}Р'=Г\text{-}1=\text{количество клеток}.=n+2(1+3+5+..+n\text{-}2)=n+2\,\frac{(n\text{-}1)}{2}\cdot\frac{(n\text{-}1)}{2}=\frac{n^2+1}{2}$
   Для n=2015: $\frac{2015^2+1}{2}=2030113$.

(9.2) Докажите, что $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится на 133 для любого натурального n.

При n=1: $11^{1+1}+12^{2-1}=121+12=133$

Пусть $11^{k+1}+12^{2k-1}\vdots 133$, тогда $11^{(k+1)+1}+12^{2(k+1)-1}=11^{k+2}+12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+1}+144\cdot 12^{2k-1}=11\cdot(11^{k+1}+12^{2k-1})+133\cdot 12^{2k-1}\vdots 133.$
Доказали с помощью ММИ.

(9.3) Найдите положительные решения уравнения $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{ax^4}}+\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2x^2}}=27\sqrt{a}$

1) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{ax^4}}+\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2x^2}}=27\sqrt{a}$;

$\sqrt{x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)}+\sqrt{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}=27\sqrt{a}$;

$\sqrt{\left(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)}=27\sqrt{a}$; $\left(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=27\cdot a^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=9\cdot a^{\frac{1}{3}}$;

$x=\left(8a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=16\sqrt{2a}$

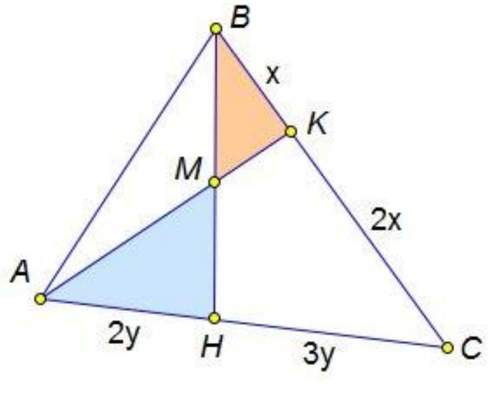
(9.4) Докажите ложность или истинность высказывания

$\sqrt{1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\dots}<\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots}$

1)

$\sqrt{1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\dots}\vee\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots}$; $\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}\vee\sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\sqrt{\frac{4}{3}}\vee\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^3\vee\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $2^8\vee 3^5$; $128<243\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\dots}<\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots}$

(9.5) В треугольнике ABC точка K делит сторону BC в отношении 1:2, считая от точки B; точка H делит сторону AC в отношении 2:3 , считая от точки A; отрезки BH и AK пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников BMK и AMH.



1) Для $\triangle$CBH и секущей AK по теореме Менелая:
$\frac{BM}{MH}\cdot\frac{HA}{AC}\cdot\frac{CK}{KB}=1;\ \frac{BM}{MH}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}=1;\frac{BM}{MH}=\frac{5}{4}$
2) Для $\triangle$CAK и секущей BH по теореме Менелая: $\triangle$CAK
3) $s_{BMK}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}=\frac{1}{9}S_{ABC}$; $s_{AMH}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot S_{ABC}=\frac{8}{45}S_{ABC}$
4) $\frac{S_{BMK}}{S_{AMH}}=\frac{\frac{1}{9}S_{ABC}}{\frac{8}{45}S_{ABC}}=\frac{5}{8}$.

(10.1) На доску выписали по порядку все натуральные числа от 1 до 2014. Затем стёрли все цифры кроме нулей и единиц. Сколько всего выписано нулей? Сколько выписано единиц? Сколько всего двоичных чисел можно составить из всех этих нулей и единиц?

1) Количество единиц:
1 –однозначное
1x – 10штук, x1 -9 штук – двузначные
xx1 -90 шт, x1x – 90шт, 1xx -100 шт – трёхзначные
1xx1-100 шт, **1**x1x -100 шт,**1**1xx -100 шт, **1**xxx- 1000 шт, 2xxx -7 шт. - четырёхзначные
Итого: 1+19+280+1307=1607
2) Количество нулей:
x0 -9 шт – двузначные
xx0, x0x -180 шт –трёхзначные
1xx0,1x0x,10xx – 300 шт, 2xxx -27 шт - четырёхзначные
Итого: 9+180+300+27=516
3) Всего двоичных чисел $C_{516+1606}^{1606}=\frac{2122!}{516!1606!}$

(10.2) Алфавит некоторого племени содержит 4 буквы – две гласные и две согласные. Каждое слово языка этого племени состоит не более чем из десяти букв. Сколько всего различных слов может содержать этот язык? Какой процент слов, состоящих только из гласных букв?

1) Всего слов $n=4^{10}+4^9+4^8+\cdots+4=4\cdot\frac{4^{10}-1}{4-1}=1398100$

2) Слов из гласных букв $m=2+2^9+2^8+\cdots+2=2\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=2046$

3) $\frac{m}{n}=\frac{2^{10}\text{-}1}{2\cdot(4^{10}\text{-}1)}\cdot 3=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{10}+1}=\frac{3}{2\cdot 1025}=\frac{3}{2050}=0{,}00146$ – *Около 0,15%*

(10.3) Докажите равенство $cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; Пусть $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=y$; $4y=1+\sqrt{5}$; $(4y-1)^2=5$; $4y^2-2y=1$

2) Пусть $\frac{\pi}{5}=x$, тогда

$\cos(5x)=\cos(\pi)=\cos(3x+2x)=\cos3x\cdot\cos2x-\sin3x\cdot\sin2x=-1$

3) $(4\cdot\cos^4x\text{-}3\cos x)\cdot(2\cos^2x\text{-}1)\text{-}(3\sin x\text{-}4\sin^3x)\cdot2\sin x\cdot\cos x=-1$;

$16\cdot\cos^5x-20\cdot\cos^3x+5\cdot\cos x+1=0$; $16y^5-20y^3+5y+1=0$; $(y+1)\cdot(16y^4-16y^3-4y^2+4y+1)=0$; $16y^4-16y^3-4y^2+4y+1=(4y^2-2y)^2-2\cdot(4y^2-2y)+1=0$;

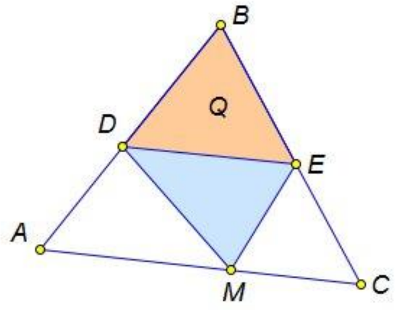
$\left((4y^2\text{-}2y)\text{-}1\right)^2=0$; $(4y^2\text{-}2y)=1\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

(10.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\frac{x-a}{x-8a}<0$ выполняется для всех x таких, что $|x-3|\leq1$

1) решение первого неравенства $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\x\in(a;8a)\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\x\in(8a;a)\end{cases}\end{array}\right.$, второго: $x\in[2;4]$

2) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\2>a\\4<8a\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\2>8a\\4<a\end{cases}\end{array}\right.$; $a\in\left(\frac{1}{2};2\right)$

(10.5) Площадь треугольника ABC равна P. Прямая DE, параллельная основанию AC, отсекает от треугольника ABC треугольник BDE, площадь которого равна Q. На стороне AC взята произвольная точка M и соединена отрезками прямых с точками D и E. Чему равна площадь четырёхугольника BDME?



1) $\triangle ABC \sim \triangle BDE$, $k=\sqrt{\frac{P}{Q}} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AB-DB}{DB}=k-1=\frac{S_{DME}}{S_{DBE}}$;

2) $S_{DME}=(k-1)S_{DBE}=\frac{\sqrt{P}-\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}}\cdot Q;$

3) $S_{BDME}=Q+\frac{\sqrt{P}-\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}}\cdot Q=\sqrt{PQ}.$

(11.1) Решить уравнение $tg(\pi\cdot ctg(2x))=ctg\left(\pi\cdot tg(2x)\right)$

$tg(\pi\cdot ctg(2x))=ctg\left(\pi\cdot tg(2x)\right); tg(\pi\cdot ctg(2x))=tg\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cdot tg(2x)\right);$ $\pi\cdot ctg(2x)=\frac{\pi}{2}-\pi\cdot tg(2x)+\pi k, k\epsilon Z;$ $ctg(2x)+tg(2x)=\frac{1}{2}+k, k\epsilon Z;$ $\frac{2}{sin4x}=\frac{1+2k}{2}; sin4x=\frac{4}{1+2k};$

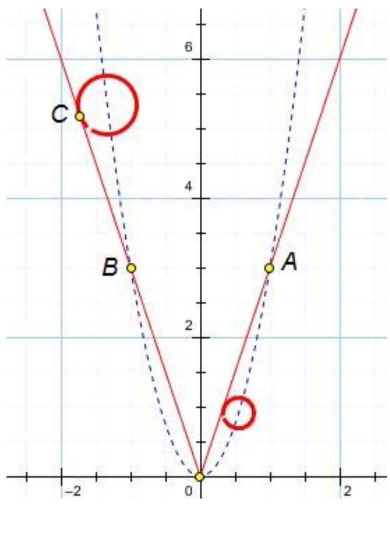
$$\begin{cases}4x=(-1)^t\arcsin\left(\frac{4}{1+2k}\right)+\pi t, t\epsilon Z\\ \frac{4}{1+2k}\le 1\\ \frac{4}{1+2k}\ge -1\end{cases}\quad \begin{cases}4x=(-1)^t\arcsin\left(\frac{4}{1+2k}\right)+\pi t, t\epsilon Z\\ \frac{3-2k}{1+2k}\le 0\\ \frac{5+2k}{1+2k}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x=(-1)^t\arcsin\left(\frac{4}{1+2k}\right)+\pi t, t\epsilon Z\\ k\epsilon(-\infty;-3]\cup[2;+\infty), k\epsilon Z\end{cases}$$

(11.2) Найдите все значения m, при которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases}\sqrt{m^2+9m^4-6m^2y-2mx+y^2+x^2}=\frac{\sqrt{10}}{7}(m-m^3)\\ y=3|x|\end{cases}$$

1)
$$\begin{cases}(x-m)^2+(y-3m^2)^2=\frac{10}{49}\cdot m^2(m^2-1)^2\\ m(m^2-1)\le 0\Rightarrow m\epsilon(-\infty;-1]\cup[0;1]\quad *\\ y=3|x|\end{cases}$$



2) Решим графически:

Первое уравнение задаёт на координатной плоскости окружность с центром $O(m;3m^2)$ и радиусом R=$\left|\frac{\sqrt{10}}{7}(\text{m-m}^3)\right|$, причём O находится на параболе $y=3x^2$

Единственное решение возможно в том случае, когда расстояние от точки O до прямой l_1: 3x-y=0 (если x>0) равно R, или когда расстояние от точки O до прямой l_2: 3x+y=0 (если x<0) равно R.

3) $\rho(O;l_1)=\frac{|3m-3m^2|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{7}(m-m^3)$; $\left[\begin{array}{c} m=0 \\ m=1 \\ m=\frac{11}{10} - \text{не подходит} * \\ m=-\frac{31}{10} - \text{не подходит}, x>0 \end{array}\right.$

4) $\rho(O;l_2)=\frac{|3m+3m^2|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{7}(m-m^3)$; $\left[\begin{array}{c} m=0 \\ m=-1 \\ m=-\frac{11}{10} \\ m=\frac{31}{10} - \text{не подходит}, x<0 \end{array}\right.$

Ответ: 0;1;-1;-$\frac{11}{10}$

(11.3) Существует ли такая арифметическая прогрессия, в которой сумма любого числа её членов равна а) квадрату числа членов б) кубу числа членов

1) $\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=n^2$ Пусть $a_1=1$, тогда $2n+d\cdot n^2-dn=2n^2$; $(d-2)n^2=n(d-2)\Rightarrow$ для любого n равенство выполняется при d=2. Таким образом, искомая последовательность: 1;3;5;7. ..

2) $\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=n^3; n(2n^2-dn+d-2a_1)=0$ – не более трёх решений относительно n при любых значениях d и a_1. Такой последовательности не существует.

(11.4) В выпуклом четырёхугольнике ABCD отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60^0, а их длины относятся как 1:3. Чему равна меньшая диагональ четырёхугольника ABCD, если большая равна $\sqrt{13}$?

1) $\begin{cases} GH||BD||EF \\ GF||AC||EH \end{cases}\Rightarrow$FGHE-параллелограмм$\Rightarrow GH=\frac{BD}{2}$
2) Пусть $EG=2x\Rightarrow FH=6x; OG=x; OH=3x; \angle GOH=120°$

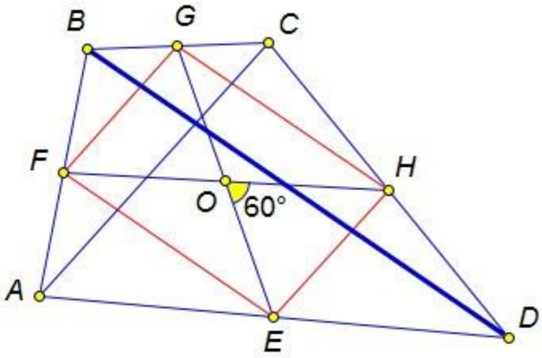
3) Из $\triangle GOH$ по теорем е косинусов

$\frac{13}{4}=9x^2+x^2+6x^2\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$;

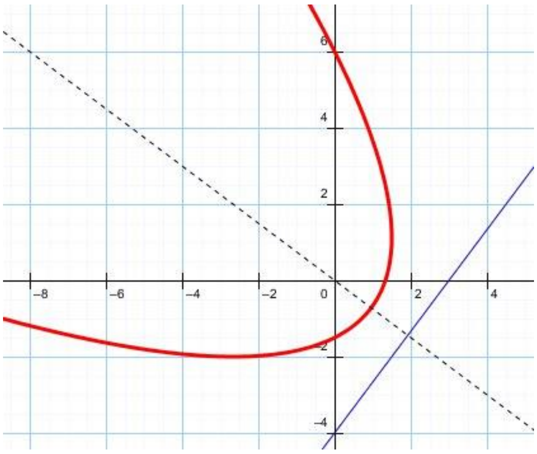
4) Из треугольника EOH

$EH=\sqrt{9x^2+x^2-6x^2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

5) $AC=2EH=\sqrt{7}$



(11.5) Найдите ГМТ равноудалённых от начала координат и прямой, проходящей через точки с координатами (3;0); (0;-4)



1) *Уравнение прямой в отрезках:* $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; $4x-3y-12=0$

2) $\rho=\frac{|4x-3y-12|}{\sqrt{16+9}}$ *–расстояние от точки(x;y) до прямой.*

3) $\sqrt{x^2+y^2}$*-расстояние от точки (x;y) до начала координат*

4) *Искомое ГМТ:* $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|4x-3y-12|}{5}$; $25\cdot(x^2+y^2)=(4x-3y-12)^2$ *– это парабола, для которой (0;0)- фокус,* $4x-3y-12=0$*- директриса.*

Олимпиада 2015 год

(8.1) Найти сумму всех значений параметра a , при которых корни уравнения $(a+2)x^2 - ax - a = 0$ симметричны относительно точки $x=1$.

Решение: $x_{\text{в}} = \frac{a}{2(a+2)} = 1; a = -4$; проверкой убеждаемся, что при $a = -4$ есть два решения.

(8.2) Найти наименьшее натуральное число, которое делится на 7, а при делении на 3,4 и 5 даёт в остатке 1.

Решение:

$$\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 3) \\ x \equiv 1(mod\ 4) \\ x \equiv 1(mod\ 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \vdots 3 \\ x - 1 \vdots 4 \\ x - 1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = 60 \cdot k; x \vdots 7 \Rightarrow 60 \cdot k + 1 \vdots 7;$$

$$\begin{cases} 60 \cdot k + 1 \equiv 4k + 1(mod\ 7) \\ 60 \cdot k + 1 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow k = 5 \Rightarrow x = 60 \cdot 5 + 1 = 301 .$$

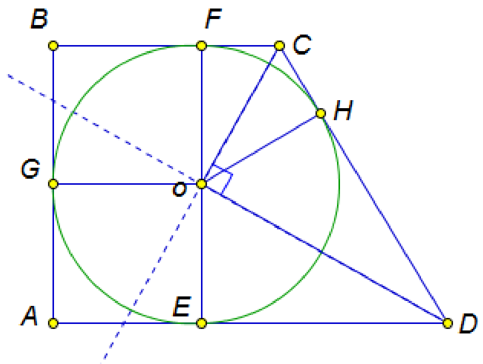
(8.3) Три спортсмена, находясь на круговой беговой трассе длиной 1 км, таким образом, что первый из них находится в противоположной точке относительно двух других, начинают движение в одном направлении. Через какое время все три спортсмена встретятся, если скорость первого - 15 км/ч второго – 12 км/ч, третьего – 10 км/ч ?

Скорости сближения 5 и 3 км/ч. Тогда составим систему уравнений:

$\begin{cases} t \cdot 5 = \frac{1}{2} + \alpha \\ t \cdot 3 = \frac{1}{2} + \beta \end{cases}$; Где α, β- количество дополнительных обгонов. $\frac{2\alpha+1}{5} = \frac{2\beta+1}{3}$; $\alpha = \frac{5\beta+1}{3}$, откуда $\alpha = 2$; $\beta = 1$. Тогда $t = \frac{2\alpha+1}{10} = \frac{1}{2}$. Ответ – 30 минут.

(8.4) Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удалён от концов её боковой стороны на расстояния 3 и 9 см. Найдите стороны трапеции.

Решение:



Центр вписанной окружности –точка пересечения биссектрис, причём $\angle COD = 90°$. Тогда $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{90}$; Соответственно

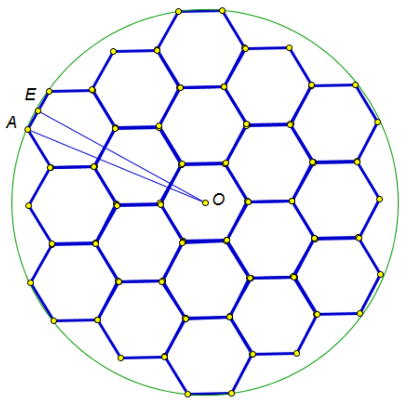
$\cos\angle CDO = \cos\angle EDO = \frac{OD}{CD} = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

$\sin\angle CDO = \sin\angle EDO = \frac{OC}{CD} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$AB = 2OE = OD \cdot \sin\angle EDO = \frac{18}{\sqrt{10}}$; $AD = AE + ED = OE + OD \cdot cos\angle EDO = \frac{36}{\sqrt{10}}$; $AD + BC = AB + CD \Rightarrow BC = AB + CD - AD = \frac{12}{\sqrt{10}}$.

(8.5) На круг площадью $S = 1900\pi$ см^2 необходимо наклеить кафельную плитку правильной шестиугольной формы со стороной 10 см. Сколько целых плиток уместится в этом круге, если центр одной из плиток совпадает с центром круга?

Решение:

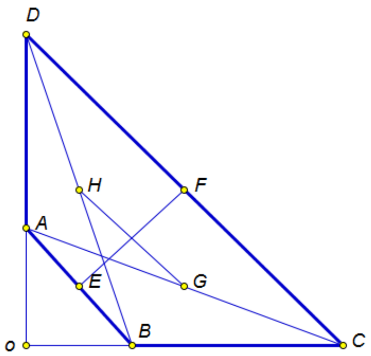


При замощении круга слой за слоем будет получаться центрально-симметричная фигура. При этом самая удалённая от центра точка слоя будет находиться на расстоянии $\rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(2k+1)\right)^2}$, где *a –длина стороны плитки.*

$$\rho = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 10\sqrt{19} = \sqrt{\frac{10^2}{4} + \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(2k+1)\right)^2};$$

$\sqrt{19} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2k+1)^2}$; k=2. То есть в большем ряду 5 плиток. Тогда всего плиток: $5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 19$. Интересен факт, что для $S = 3700\pi$ см^2 количество плиток -37 и т.д.

(9.1) В выпуклом четырёхугольнике ABCD длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 3. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.



Решение:

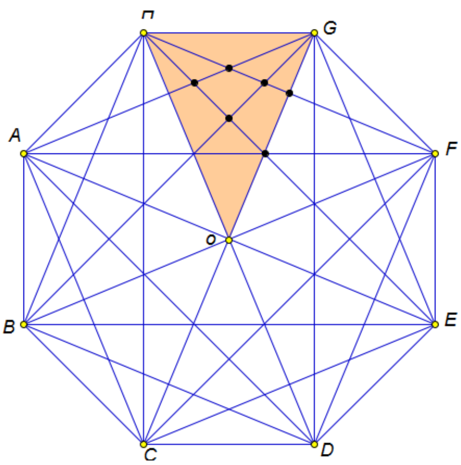
Методом координат: $A(0;y_A)$; $B(x_B;0)$; $C(x_C;0)$; $D(0;y_D)$

Тогда $E\left(\frac{x_B}{2};\frac{y_A}{2}\right)$; $F\left(\frac{x_C}{2};\frac{y_D}{2}\right)$; $H\left(\frac{x_B}{2};\frac{y_D}{2}\right)$; $G\left(\frac{x_C}{2};\frac{y_A}{2}\right)$

$\overrightarrow{EF}\left\{\frac{x_C-x_B}{2};\frac{y_D-y_A}{2}\right\}$; $\overrightarrow{GH}\left\{\frac{x_B-x_C}{2};\frac{y_D-y_A}{2}\right\}$;

Очевидно, длины векторов равны, поэтому GH=EF=3

(9.2) Сколько диагоналей имеет правильный восьмиугольник? Сколько точек пересечения его диагоналей?



Решение:

Всего диагоналей $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=\frac{8\cdot5}{2}=20$

Разбив правильный восьмиугольник на равные (8 штук) симметричные треугольники посчитаем количество точек пересечения $8\cdot6+1=49$. (одна общая - центральная)

(9.3) Для составления детских новогодних подарков было закуплено 15 видов конфет, семь наименований фруктов, 10 видов шоколадных плиток и два вида упаковки. Сколько различных подарков можно составить, если один подарок должен содержать 10 различных конфет, пять различных фруктов и две различные шоколадки?

Решение:

Количество различных наборов из 10 различных конфет из 15 видов, - это $C_{15}^{10}=\frac{15!}{10!5!}$

Количество различных наборов из 5 различных фруктов из 7 видов, - это $C_7^5=\frac{7!}{5!2!}$

Количество различных наборов из 2 различных шоколадок из 10 видов, - это $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!}$

Различных упаковок, - две. Всего различных подарков: $C_{15}^{10} \cdot C_7^5 \cdot C_{10}^2 \cdot 2 = \frac{15!}{10!5!} \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{10!}{2!8!} \cdot 2 = 5675670$

(9.4) Три спортсмена, находясь на круговой беговой трассе длиной 5 км, таким образом, что первый из них находится в противоположной точке относительно двух других, начинают движение в одном направлении. Через какое время все три спортсмена встретятся, если скорость первого на 3 км/ч больше второго и на 5 км/ч больше третьего?

Скорости сближения 5 и 3 км/ч. Тогда составим систему уравнений:

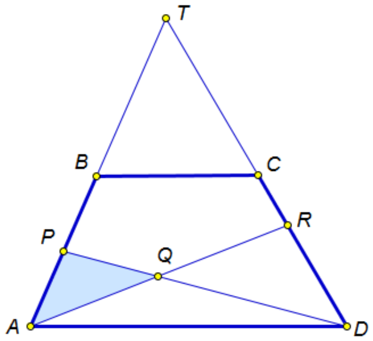
$\begin{cases} t \cdot 5 = \frac{5}{2} + 5\alpha \\ t \cdot 3 = \frac{5}{2} + 5\beta \end{cases}$; Где α, β- количество дополнительных обгонов. $\frac{2\alpha+1}{5} = \frac{2\beta+1}{3}$; $\alpha = \frac{5\beta+1}{3}$, откуда $\alpha = 2;\ \beta = 1$. Тогда $t = \frac{2\alpha+1}{2} = \frac{5}{2}$. Ответ – 2 часа 30 минут.

(9.5) При каком наибольшем целом a неравенство $\frac{x^2-ax-2}{x^2-x+1} < 2$ верно при всех x ?

Решение:

$\frac{x^2-ax-2}{x^2-x+1} < 2$; $\frac{x^2+(a-2)x+4}{x^2-x+1} > 0$; $x^2 + (a-2)x + 4 > 0$ – выполняется для любого x, если D<0; $(a-2)^2 - 16 < 0$; $a \in (-2; 6)$. Наибольшее целое a=5.

(10.1) Площадь трапеции ABCD равна 30. Точка P- середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что 2CD=3RD. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если AD=2BC.



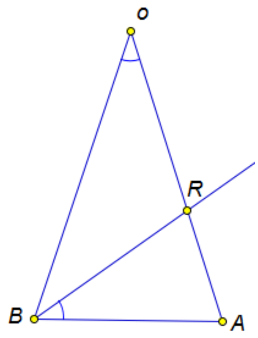
Решение:

Из ΔPDT по теореме Менелая (секущая QR):

$\frac{PQ}{QD} \cdot \frac{DR}{RT} \cdot \frac{TA}{AD} = 1;\quad \frac{PQ}{QD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 1;\quad \frac{PQ}{QD} = \frac{1}{2}$

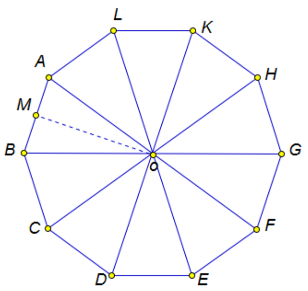
$$S_{PQA} = \frac{1}{3} S_{APD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{BDA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{ABCD} = \frac{10}{3}$$

(10.2) Сколько диагоналей имеет правильный десятиугольник? Найдите площадь правильного десятиугольника с единичным ребром.



Решение:

Всего диагоналей $\frac{n\cdot(n-3)}{2} = \frac{10\cdot 7}{2} = 35$



$S = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA^2 \cdot sin36° = 5 \cdot sin36°;$

Найдём $sin36°$: $\Delta AOB \sim \Delta \mathrm{ABR}; \frac{AR}{AB} = \frac{AB}{AO};$

$\frac{AR}{AB} = \frac{AB}{AR+AB}; \frac{AR}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \cdot cos\angle BAR;$

$sin\angle ABR = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}; S = S = 5 \cdot sin36° = 5 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$

(10.3) Для составления детских новогодних подарков было закуплено 10 видов конфет, пять наименований фруктов, семь видов шоколадных плиток и два вида упаковки. Сколько различных подарков можно составить, если один подарок должен содержать 15 конфет, три фрукта и две шоколадки?

Решение:

Количество различных наборов конфет длиною 15 из 10 видов, - это $\bar{C}_{10}^{15} = \bar{P}_{15,9} = \frac{(15+9)!}{15!9!}$

Количество различных наборов фруктов длиною 3 из 5 видов, - это $\bar{C}_5^3 = \bar{P}_{3,4} = \frac{(3+4)!}{3!4!}$

Количество различных наборов шоколадок длиною 2 из 7 видов, - это $\bar{C}_7^2 = \bar{P}_{2,6} = \frac{(6+2)!}{6!2!}$

Различных упаковок, - две. Всего различных подарков: $\bar{C}_{10}^{15} \cdot \bar{C}_5^3 \cdot \bar{C}_7^2 \cdot 2 = \frac{(24)!}{15!9!} \cdot \frac{(7)!}{3!4!} \cdot \frac{(8)!}{6!2!} \cdot 2 = 366101120$

(10.4) Найти наибольшее значение параметра a , при котором уравнения $\sin x = 1 - \cos x$ и $\cos\frac{x}{2} = a - 2$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение:

$$\sin x = 1 - \cos x;\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ \frac{x}{2} = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Подставим $\frac{x}{2} \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; 0; \pi\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = a - 2 \\ \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 0 = 1 = a - 2 \\ \cos\pi = -1 = a - 2 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 3 \\ a = 1 \end{array}\right.;\ \text{Наибольшее } a = 3.$$

(10.5) Три пешехода, находясь на круговой трассе длиной 1 км, таким образом, что первый из них находится на расстоянии в четверть круга от двух других. Второй и третий находятся в противоположных точках трассы. Первый и второй начинают движение по часовой стрелке, третий – против часовой стрелки. Через какое время все три пешехода встретятся, если скорость первого - 4 км/ч второго и третьего 1 км/ч ?

Решение:

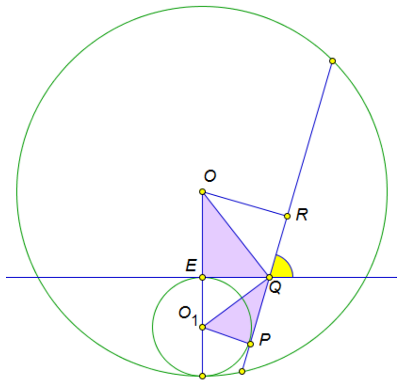
Скорость сближения второго и третьего- 2 км/ч, первого и второго – 3 км/ч Тогда составим систему уравнений:

$$\begin{cases} t \cdot 2 = \frac{1}{2} + \alpha \\ t \cdot 3 = \frac{1}{4} + \beta \end{cases};$$ Где α, β- количество дополнительных обгонов.

$\frac{2\alpha+1}{4} = \frac{4\beta+1}{12}$; $\alpha = \frac{2\beta-1}{3}$, откуда $\beta = 2;\ \alpha = 1$. Тогда $t = \frac{2\alpha+1}{4} = \frac{3}{4}$.

Ответ – 45 минут.

(11.1) Две окружности, отношение радиусов которых равно $9-4\sqrt{3}$, касается внутренним образом. Проведены две равные хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей. Найдите острый угол между этими хордами.

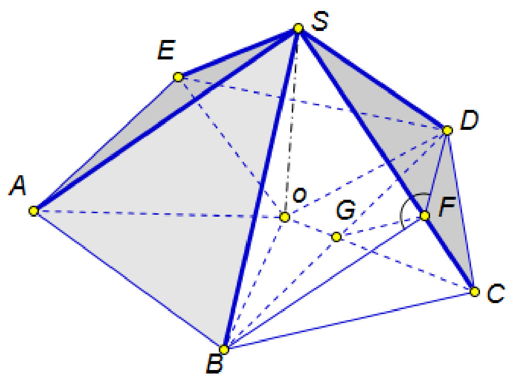


Решение:

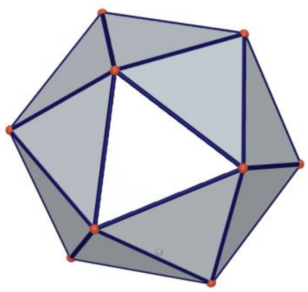
$$\Delta O_1PQ \sim \Delta QEO;\ \frac{EQ}{EO}=\frac{O_1P}{PQ};\ \frac{EQ}{R-2r}=\frac{r}{EQ}=tg\frac{\varphi}{2};\ tg^2\frac{\varphi}{2}=$$

$$\frac{r}{R-2r}=\frac{1}{\frac{R}{r}-2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2};tg\varphi=\frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \varphi=30°$$

(11.2) Найдите двугранный угол при ребре правильного



икосаэдра(двадцатигранника- из вершины выходит 5 рёбер, грань – правильный треугольник)



Решение:

Задача сводится к нахождению двугранного угла правильной пятиугольной пирамиды.

Пусть ребро единичное, тогда $BF = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2 - 2 \cdot BC \cdot DC \cdot cos\angle BCD}$;

$BD = \sqrt{2 - 2 \cdot cos108°} = \sqrt{2 + 2 \cdot cos72°} = \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}$

$cos\angle BFD = \frac{2 \cdot BF^2 - BD^2}{2 \cdot BF^2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}+3}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\angle BFD = \arccos(-\frac{\sqrt{5}}{3};\ )$

(11.3) Для составления детских новогодних подарков было закуплено 3 вида конфет, пять наименований фруктов и два вида упаковки. Сколько различных подарков можно составить, если один подарок должен содержать 10 конфет, и три различных фрукта?

Решение:

Количество различных наборов конфет длиною 10 из 3 видов, - это $\bar{C}_3^{10} = \bar{P}_{10,2} = \frac{(10+2)!}{10!2!}$

Количество различных наборов из 3 различных фруктов из 5 видов, - это $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$

Различных упаковок, - две. Всего различных подарков: $\bar{C}_3^{10} \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{(12)!}{10!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 = 1320$

(11.4) Три спортсмена, находясь на круговой беговой трассе длиной 1 км, на расстоянии друг от друга равном трети круга, начинают движение в одном направлении. Через какое время все три спортсмена встретятся, если скорость первого больше скорости второго на 4 км/ч, скорость второго на 5 км/ч больше скорости третьего?

Решение:

Собственно 4 и 5км/ч – скорости сближения

Возможны 2 случая:

1) 5 км/ч – скорость сближения первого и того, который по ходу движения находится на расстоянии трети круга. Тогда составим систему уравнений:

$\begin{cases} t \cdot 5 = \frac{1}{3} + \alpha \\ t \cdot 4 = \frac{2}{3} + \beta \end{cases}$; Где α, β- количество дополнительных обгонов. $\frac{3\alpha+1}{5} = \frac{3\beta+2}{4}$; $\beta = \frac{4\alpha-2}{5}$, откуда $\alpha = 3;\ \beta = 2$. Тогда $t = \frac{3\alpha+1}{15} = \frac{2}{3}$. Ответ – 40 минут.

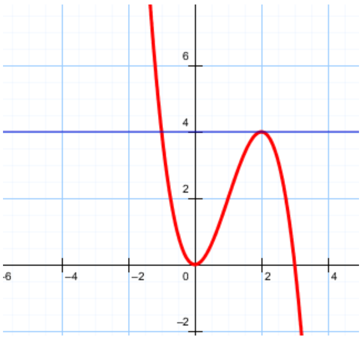
2) 4 км/ч – скорость сближения первого и того, который по ходу движения находится на расстоянии трети круга. Тогда составим систему уравнений:
$\begin{cases} t \cdot 5 = \frac{2}{3} + \alpha \\ t \cdot 4 = \frac{1}{3} + \beta \end{cases}$; Где α, β- количество дополнительных обгонов. $\frac{3\alpha+2}{5} = \frac{3\beta+1}{4}$; $\beta = \frac{4\alpha+1}{5}$, откуда $\alpha = 1;\ \beta = 1$. Тогда $t = \frac{3\alpha+2}{15} = \frac{1}{3}$. Ответ – 20 минут.

(11.5) Сколько корней имеет уравнение $3x^2 - x^3 = a$ при $0 < a < 4$?

Решение:

Исследуем и построим график функции $a(x) = 3x^2 - x^3$

$a'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$; $x = 2$ –точка максимума, $x = 0$ – точка минимума.



На промежутке от 0 до 4 уравнение имеет ровно три решения.

Оглавление

Новокузнецк, 2015